QC1
I68

CONSEIL PERMANENT INTERNATIONAL POUR
L'EXPLORATION DE LA MER

1826

RAPPORTS
ET
PROCÈS-VERBAUX DES RÉUNIONS

VOLUME XLVI

CONTRIBUTION AUX APPAREILS ET AUX MÉTHODES DESTINÉS AUX RECHERCHES OCÉANOGRAPHIQUES PRATIQUÉES À BORD D'UN NAVIRE EN MARCHE

PAR

J. HABERT

ENSEIGNE DE VAISSEAU DE LA MARINE FRANÇAISE

EN COMMISSION CHEZ
ANDR. FRED. HØST & FILS
COPENHAGUE

Mars 1928.

60. III. 28

COPENHAGUE — IMPRIMERIE BIANCO LUNO

Contribution aux appareils et aux méthodes destinés aux recherches océanographiques pratiquées à bord d'un navire en marche.

Par

J. Habert,

Enseigne de vaisseau de la Marine Française.

I.

Sur la forme des panneaux de plongée.

Après la perte d'un panneau de drague »D.L.«, nous avons adopté, pour le remplacer, un appareil de forme différente.

On a construit, successivement, quatre panneaux, tous, approximativement, sur le même modèle (fig. 1).

Le plan $AEFB$ est un plan de symétrie, vertical; A est l'AR, B l'AV du panneau. Sur la droite AB se joignent trois surfaces: Une surface plane, trapézoïdale $AEFG$, rectangle en A et G, servant de plan directeur. L'angle E est arrondi. Le plan directeur, à l'AR, tout près de l'arête AE, se dédouble, de sorte que l'arête AE est remplacée par un dièdre, ouvert vers l'AR, de 60° environ.

Deux surfaces hélicoïdales symétriques, servant d'ailes, ABC_1D_1, à tribord, ABC_2D_2, à bâbord. Chacune de ces ailes s'obtient à partir d'un trapèze, rectangle en A et B, tordu de manière à en faire un hélicoïde, d'axe AB, de pas très allongé, à droite pour l'aile tribord, à gauche pour l'aile bâbord. L'angle C_1BC_2 est de 120°, D_1AD_2, de 160°.

Toutes les cotes une fois observées, les angles en C sont largement arrondis, et les angles en D aussi, un peu. Vers l'AR, tout près du côté AD, l'aile se relève fortement.

Des trous sont percés près de l'arête EF, depuis le milieu du panneau, jusqu'à F. Ils donnent passage à un boulon de manille. En fixant, par cette manille, l'extrémité de l'aussière de remorque aux différents trous, on obtient le réglage du panneau.

Sous les ailes, un poids P, en plomb, est fixé le plus près possible de B.

Les caractéristiques des panneaux sont données par le tableau suivant:

No.	Dates		Longueurs en mètres								Poids P, kgs.
	Essai	Perte	$\overline{AB}$	$\overline{AG}$	$\overline{AE}$	$\overline{GF}$	$\overline{AD}$	$\overline{BC}$	(j)	(k)	
1	11. 8.26	26. 8.26	0,80	0,60	0,30	0,15	0,30	0,25	0,440	228	8
2	19. 9.26	1.10.26	0,85	0,60	0,30	0,15	0 33	0,25	0,493	255	6
3	4.10.26	6.10.26	0,80	0,55	0,25	0,19	0,25	0,18	0,344	178	18
4	13.10.26	....	0,40	0,25	0,13	0,10	0,13	0,09	0,088	46	5

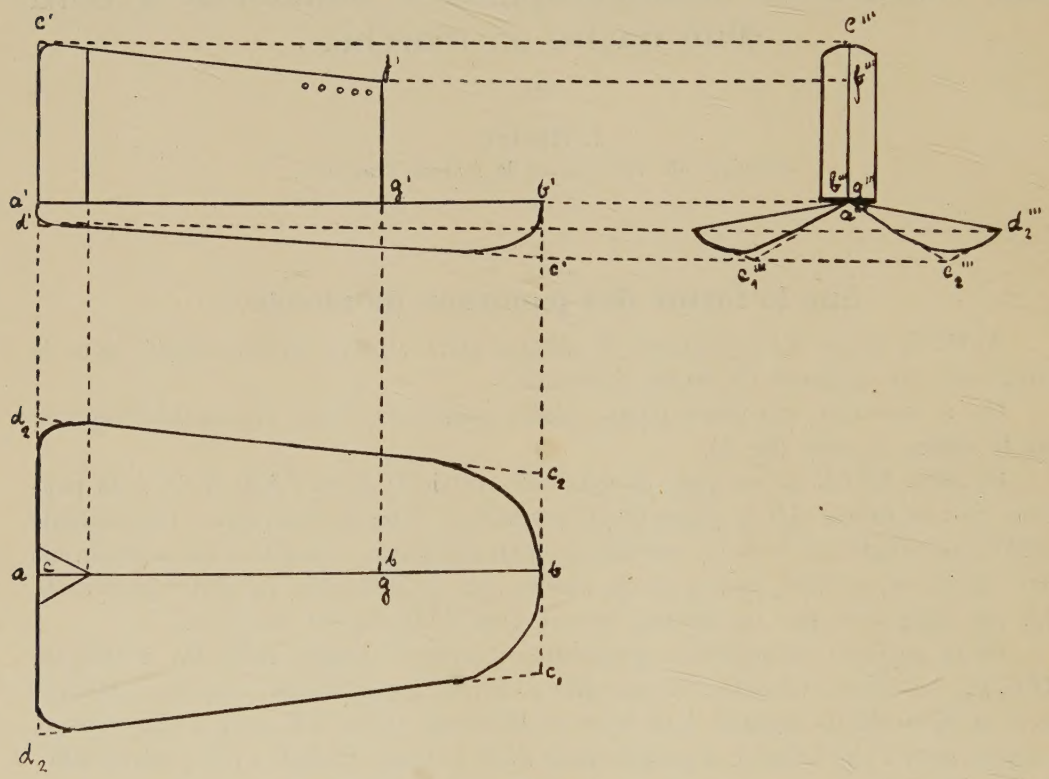


Fig. 1.

Dans ce tableau, la colonne (j) contient la surface totale des ailes, exprimée en mètres carrés, et la colonne (k) renferme l'effort maximum exercé par l'eau sur le panneau, exprimé en kilogrammes. Cet effort a été calculé par la formule de Joëssel; il est certainement plus faible que l'effort réel, et représenterait probablement, à peine, l'effort pour une incidence de 30° des filets d'eau sur le panneau.

Les panneaux no. 1 et 2 n'étaient pas tout à fait conformes à la description précédente: ils avaient leur plan directeur en un seul plan: la partie AR ne se séparait pas en deux.

Ce modèle de panneau de plongée a été adopté, pour les avantages suivants:

1° Il est très facile à construire. Les panneaux n°. 3 et 4 étaient faits simplement de deux plaques de forte tôle, découpées à la forme *AEFGBCDA*, pliées selon *AG*, et rivées par leur partie commune *AEFG*. Les ailes étaient alors tordues en hélicoïdes, leur AR était relevé à coups de marteau, comme il a été dit. Les deux tôles accolées formant le plan directeur étaient séparées, en dièdre, près de *AE*, et percées de trous près de *FE*.

2° Le réglage est plus facile, avec ces trous qu'avec une patte d'oie[1]).

3° La prise d'immersion est sûre, et ne nécessite pas que le bâtiment modifie sa vitesse:

Lorsque le panneau, en touchant la surface de l'eau, se met à l'envers, le plan directeur en bas, il hydroplane. Mais le gauchissement de l'AR des ailes, d'une

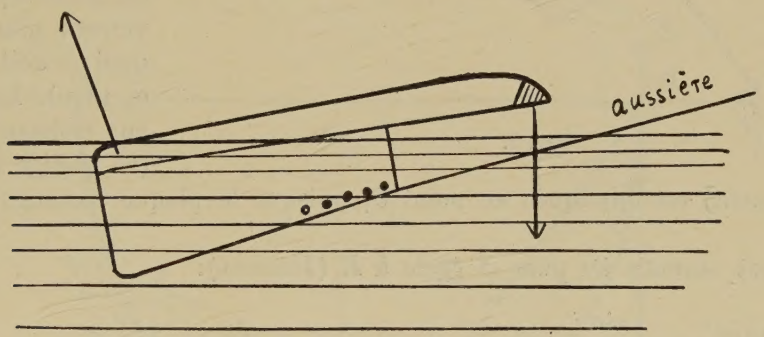


Fig. 2.

part, et, d'autre part le poids *P*, créent deux forces tendant à faire plonger l'AV. Dès que *B* est entré dans l'eau, le panneau se retourne pour prendre sa position normale.

De plus, le gauchissement de l'AR des ailes et du plan directeur empêchent absolument le panneau de diverger en restant en surface, lors de la prise d'immersion.

Les essais des panneaux n°. 2 et 3 ont montré clairement l'influence heureuse du relèvement de l'AR des ailes, pour la prise d'immersion.

4° L'équilibre du panneau est bon. Pour le montrer, nous allons étudier sommairement l'équilibre d'un plan mince rectangulaire, de poids négligeable, plongé dans un courant d'eau, et fixé par un point *O* de son grand axe.

Faisons passer 3 axes de coordonnées rectangulaires par le point *O*: *Oz* ver-

---

[1]) Seul, le panneau n°. 2 a été difficile à régler. Il faut attribuer cet insuccès à ce que le poids *P* était trop faible, et les ailes insuffisamment gauchies. Autre défaut: les ailes et le plan directeur étaient armaturés par de fortes membrures en fer plat, constituant des redans, dont l'influence étrange et imprévisible, gênait, à notre avis, le réglage de l'appareil.

tical, dirigé vers le haut, Oy horizontal, de direction opposée à celle de la vitesse de l'eau par rapport au panneau, Ox perpendiculaire aux deux autres, de façon à former un trièdre positif.

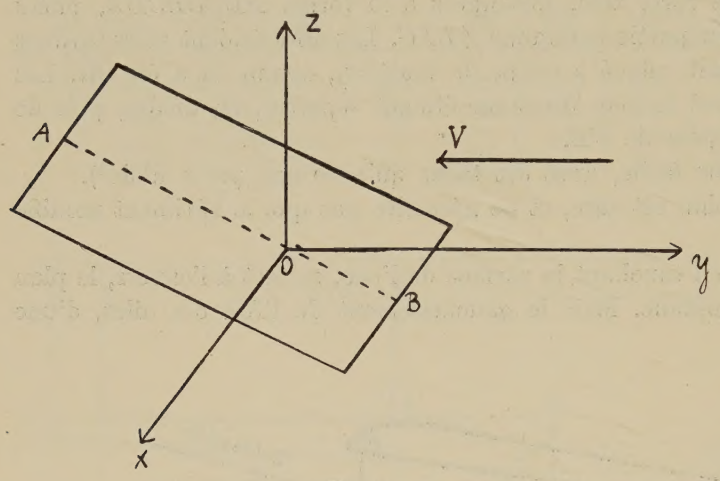


Fig. 3.

La plaque, autour de O, possède trois degrés de liberté. Etudions-les séparément.

(a) Autour de Ox. Par hypothèse, l'axe Ox est dans le plan du rectangle, et perpendiculaire au grand axe AB (nous verrons plus loin pourquoi Ox doit rester dans ce plan). La force dûe aux résistances de l'eau (on néglige la résistance de frottement) est appliquée au point O, puisque la plaque rectangulaire est en équilibre.

Elle est normale àu plan et égale à R (Joëssel):

$$R = K\Sigma^2 V^2 \frac{\sin i}{0{,}195 + 0{,}305 \sin i}$$

en désignant par Σ^2 la surface du rectangle, par V la vitesse de l'eau par rapport aux axes, et i l'angle de la plaque avec Ox; K est une constante égale à 41,35 (système M. K. S.).

A est l'AR de la plaque, et B l'AV; on a:

$$\overline{OB} = \overline{AB}\,(0{,}195 + 0{,}305 \sin i).$$

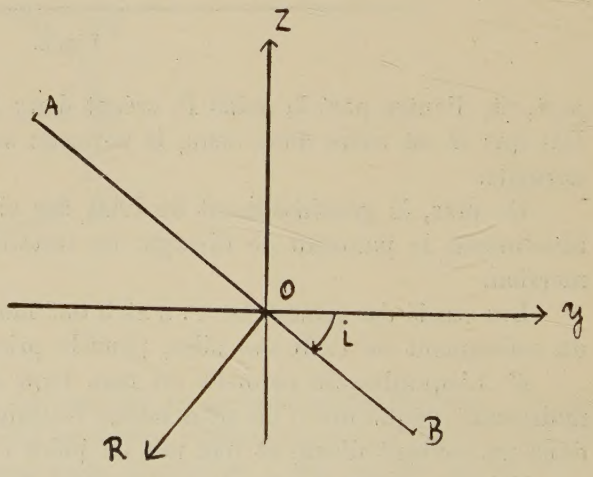


Fig. 4.

Cette équation fixe, pour chaque valeur de $\overline{OB}/\overline{AB}$, c'est-à-dire pour chaque position du point O sur AB, l'angle i que fera naturellement la plaque avec la direction de la vitesse de l'eau. La grandeur et la direction de la force R dépendront seulement de la position de O sur AB.

Soit I le milieu de AB. Déplaçons O de B à I. Quand $\overline{OB}$ est plus petit que $0{,}195 \cdot \overline{AB}$, i est nul, et R aussi. Quand $\overline{OB}$ croît, de $0{,}195 \cdot \overline{AB}$, jusqu'à $\overline{IB}$, le vecteur R croît aussi. L'extrémité du vecteur R décrit une courbe (C), (fig. 5) dont les équations paramétriques sont:

$$\begin{cases} y = -K\Sigma^2 V^2 \dfrac{\sin^2 i}{0{,}195 + 0{,}305 \sin i} \\ z = -K\Sigma^2 V^2 \dfrac{\sin i \cos i}{0.195 + 0{,}305 \sin i} \end{cases}$$

Le vecteur R est dirigé comme la vitesse de l'eau, quand I est en O; i est alors égal à 90°, et la courbe (C) coupe l'axe des y, en un point H, tel que $\overline{OH} =$

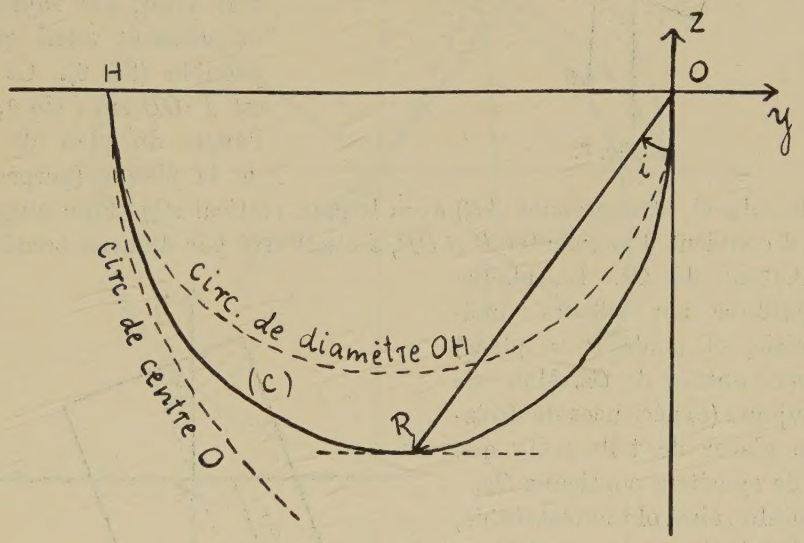


Fig. 5.

$-2\ K\Sigma^2 V^2$. La courbe (C) n'admet de tangente parallèle à Oz qu'en O et H $(dx/di = 0)$. Elle admet une tangente parallèle à Ox, quand $dz/di = 0$, ce qui se produit seulement pour $i = 36°$[1]). $|z|$ passe alors par un maximum supérieur à $|\overline{OH}/2|$, et inférieur à $|\overline{OH}|$. On a alors $\overline{OB} = 0{,}38\ \overline{AB}$.

(b) Autour de Oy. Le poids n'intervenant pas, rien n'indique la direction de la pesanteur. La plaque rectangulaire peut tourner, en équilibre indifférent, autour de Oy, en restant toujours tangente à un cône de révolution ayant i pour $^1/_2$ angle au sommet, et Oy pour axe. La force R décrit alors un autre cône, de même axe:

[1]) Cet angle est aussi celui pour lequel l'effet évolutif du gouvernail sur un navire est maximum. Cette coïncidence est évidente.

or, il ne faut pas que R sorte d'un plan vertical, parce qu'alors, l'aussière de remorque sort aussi du plan vertical (sa courbe d'équilibre devient, d'ailleurs, gauche), et le panneau navigue à une profondeur quelconque; il peut venir tout prés de la surface, et même émerger.

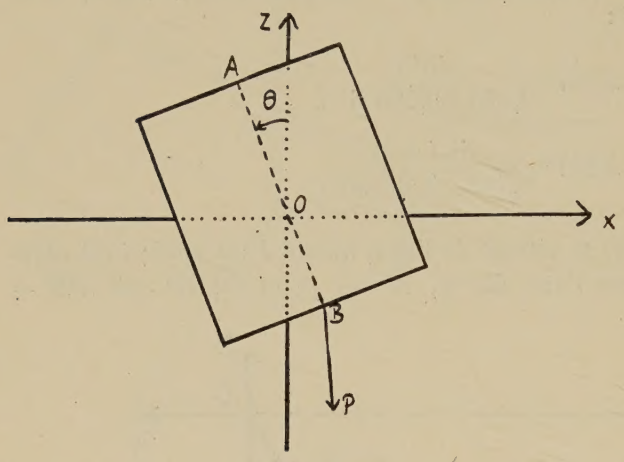


Fig. 6.

Pour donner au panneau la »notion de la pesanteur«, il faut lui appliquer la force d'un poids, obligeant AB à rester dans le plan vertical zOy. Le poids P remplit cet office. Il doit avoir, par rapport à Oy, un moment aussi grand que possible (fig. 6). Ce moment est $P \cdot \overline{OB} \sin i \sin \theta$, θ étant l'angle du plan de symétrie de la plaque (perpendiculaire au plan de celle-ci, et contenant AB) avec le plan vertical zOy. Pour augmenter ce moment, il convient d'augmenter P et $\overline{OB}$, i étant fixé par d'autres considérations.

(c) Autour de Oz. La plaque étant équilibrée par ailleurs (incidence choisie, et poids P en place) peut tourner autour de Oz. Mais elle tendra toujours (expériences de Joëssel) à se placer de telle sorte que son plan de symétrie contienne Oy.

L'équilibre ainsi obtenu est stable, mais faible; évaluons le couple tendant à ramener la plaque dans sa position d'équilibre, lorsqu'on l'en écarte en la faisant tourner d'un angle φ autour de Oz.

L'incidence a changé: elle n'est plus i, mais j. La force R devient:

$$R' = K\Sigma^2 V^2 \frac{\sin j}{0{,}195 + 0{,}305 \sin j}.$$

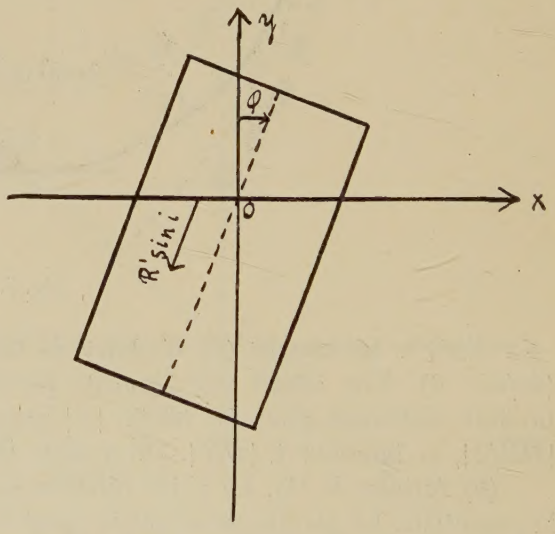


Fig. 7.

Le point d'application de R' est en dehors de AB, et à une distance p de cette ligne[1]):

[1]) Nous n'essaierons pas de démontrer que cette généralisation des formules de Joëssel est légitime: il faudrait qu'elle fut confirmée par des expériences. Mais, elle est la plus logique.

$$p = 0{,}5\, d - (0{,}195 + 0{,}305 \cos \varphi)\, d$$

en appelant d la dimension de la plaque, perpendiculairement à AB. Ou:

$$p = 0{,}305\, d\, (1 - \cos \varphi).$$

Le moment de R' par rapport à Oz est (fig. 7):

$$(M = R' \sin i \cdot p = R' \sin i\, 0{,}305\, d\, (1 - \cos \varphi).$$

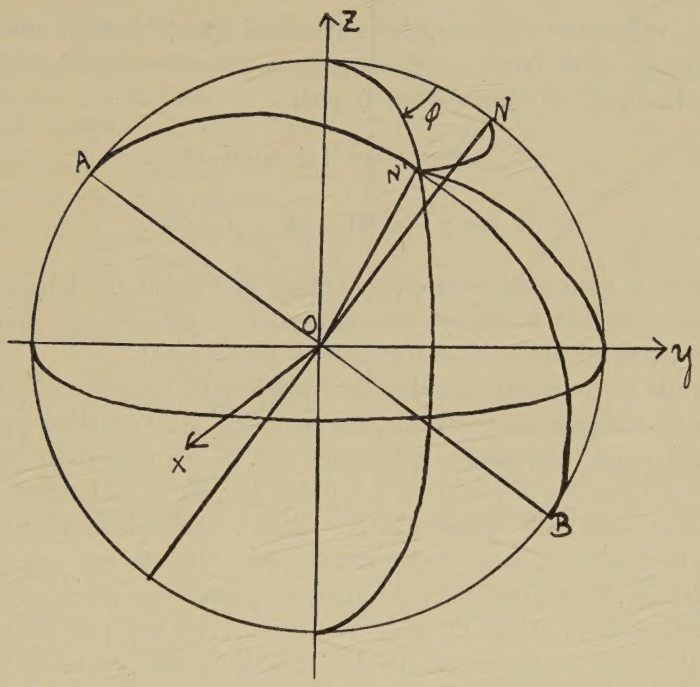


Fig. 8.

Soit ON normale à la plaque, quand AB est dans le plan zOy. Quand la plaque tourne de φ autour de Oz, N vient en N' (fig. 8). Dans le triangle sphérique $zN'y$, l'angle en z est égal à φ, le côté zN' à i, le côté zy à 90°, et le côté $N'y$ à 90°—j. On a:

$$\sin j = \sin i \cos \varphi.$$

Le moment M est donc:

$$M = K \Sigma^2 V^2 \frac{\sin^2 i \cos \varphi}{0{,}195 + 0{,}305 \sin i \cos \varphi}\, 0{,}305\, d\, (1 - \cos \varphi).$$

En désignant par N le facteur constant, et dérivant le moment M par rapport à φ:

$$\frac{dM}{d\varphi} = N \sin \varphi \frac{[2\,(0{,}195 + 0{,}305 \sin i \cos \varphi) - 0{,}305 \sin i \cos \varphi]\ \cos \varphi - 0{,}195}{(0{,}195 + 0{,}305 \sin i \cos \varphi)^2}.$$

Prenons $i = 36°$. La dérivée s'annule pour $\varphi = 0$, ou $180°$, et le couple, nul, alors, passe par un minimum. La dérivée s'annule encore lorsqu'on donne à cos φ les valeurs des racines de l'équation du 2ème degré:

$$0{,}305 \sin i \cos^2 \varphi + 2 \cdot 0{,}195 \cos \varphi - 0{,}195 = 0.$$

Des racines, une seule est comprise entre -1 et $+1$, donc acceptable; elle est positive. Elle est égale ($\sin i = 0{,}6$) à 0,444. φ est alors égal à 63°6. L'angle γ des deux normales NN' est donné (fig. 8) par:

$$\cos \gamma = \cos^2 i + \sin^2 i \cos \varphi$$

d'où

$$\cos \gamma = 0{,}80 \quad \text{et} \quad \gamma = 37°.$$

Ces résultats nous guideront dans le choix de l'angle des deux ailes du panneau.

La construction et le réglage des panneaux de plongée que nous avons utilisés s'inspire directement de ces considérations théoriques:

L'étude de la courbe d'équilibre de l'aussière de remorque (annexe B), montre qu'on ne peut trouver, pour l'angle, au panneau, de l'aussière avec l'horizontale, de valeur optimum, convenant à tous les cas. Si on choisit un angle très grand, l'incidence de l'eau sur le panneau est faible (fig. 5), et la tension initiale de l'aussière est faible aussi. L'aussière plonge d'abord verticalement, lorsqu'on n'en file qu'une petite longueur, puis se rapproche très vite de son asymptote lorsqu'on en file davantage. Si, au contraire, le panneau exerce une grande force, peu inclinée sur l'horizontale, l'arc utilisé de la courbe sera, lui aussi, peu incliné sur l'horizontale, mais il ne se rapprochera que lentement de son asymptote, donc gardera, pour les grandes longueurs de remorque, une pente notable.

Un juste compromis consiste, nous a-t-il semblé, à adopter comme incidence l'angle de 36°. La composante verticale de la résistance de l'eau (poussée), est alors maximum, et la traînée est encore faible. L'aussière fait alors avec l'horizontale un angle de 54°. En fait, pour les petites incidences, jusque vers 40°, le frottement de l'eau sur le panneau n'est plus négligeable devant la résistance de rencontre, et dans la pratique nous nous sommes contentés d'un angle de 45° de l'aussière avec l'horizontale[1]).

Le déplacement du point d'attache du panneau, de trou en trou le long de FE permet de faire varier l'incidence.

---

[1]) Les panneaux n°. 1 et 3 donnaient à l'aussière cette inclinaison, lorsqu'ils étaient traînés seuls, sans appareils (le petit sac à Plankton de 30 cm d'ouverture, à 10 nœuds, exerce une résistance d'environ 100 kgs, diminuant beaucoup l'inclinaison de l'aussière).

Comme les ailes du panneau sont, en projection sur un plan contenant AB et perpendiculaire au plan de symétrie, de forme trapézoïdale et non rectangulaire, le point d'application de la force R est, toutes choses égales d'ailleurs, plus sur l'AR que dans le cas du plan mince rectangulaire. Pour obtenir l'incidence de 36°, il faut prendre OB supérieur à $0{,}38\ \overline{AB}$. La longueur BG peut donc être au moins égale à cette valeur, et c'est ce qui nous a guidé pour limiter, vers l'AV, le plan directeur.

La forme héliçoïdale des ailes a pour effet, à surface égale, d'augmenter la force R: le frottement sur la surface de l'aile diminue la vitesse relative de l'eau. En augmentant l'incidence de la partie AR des ailes, on utilise mieux leur surface, en compensant l'effet du frottement (fig. 9).

Cette forme, de plus, semble donner une meilleure stabilité autour de Ox.

La forme trapézoïdale des ailes a été préférée à la forme rectangulaire, pour deux raisons: d'abord, elle réduit l'influence du bord d'attaque: or, c'est à l'influence, assez mal connue, du bord d'attaque, qu'il faut attribuer les fortes vibrations, la discontinuité de la résistance de l'eau quand l'incidence varie, et autres phénomènes fâcheux[1]).

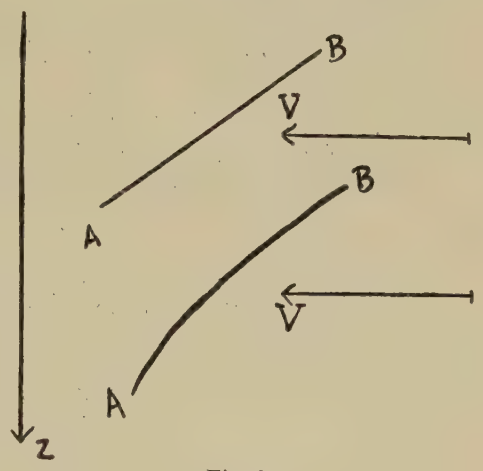


Fig. 9.

De plus, en permettant d'augmenter la longueur OB, elle augmente le moment du poids P par rapport à l'axe Oy[2]). Le choix du point d'attache O sur FE au lieu de AB augmente la stabilité de poids.

La forme en V de la section des ailes par un plan perpendiculaire à AB est commandée par la discussion de la stabilité autour de Oz[3]). Cette forme rend instable

[1]) Nous avions l'intention d'améliorer le bord d'attaque, en lui donnant de l'épaisseur. Mais la construction d'ailes épaisses était trop compliquée.

[2]) Nous avions songé à mettre le poids P au bout d'un bout-dehors prolongeant AB vers l'AV. Mais la résistance supplémentaire de cet appendice eut pu être préjudiciable à l'équilibre de l'appareil.

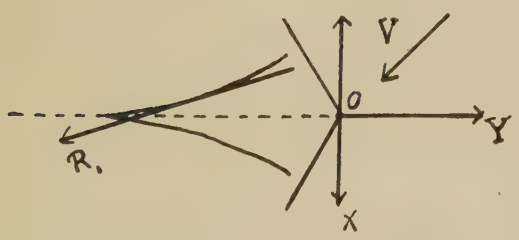


Fig. 10.

[3]) Il aurait été plus avantageux pour cette partie d'étudier la stabilité autour d'un axe passant par AB. Soit OZ cet axe, OX confondu avec Ox, et OY perpendiculaire à XOZ. Quand on fait tourner le panneau autour de OZ, la projection de la résultante des actions de l'eau sur XOY enveloppe une courbe (métacentrique), dont la forme conditionne la stabilité de forme.

la position d'équilibre pour $\varphi = 180°$, ne laissant que celle pour $\varphi = 0$. Mais son avantage principal est de donner une stabilité plus forte à la position d'équilibre normale. On a vu que dans le cas de la plaque rectangulaire le couple redressant maximum était atteint pour un angle φ voisin de 64°, correspondant à $\gamma = 37°$. Si l'angle γ dépasse cette valeur sous l'effet d'un couple perturbateur constant, le panneau chavire[1]).

Il convient de remplacer la plaque plane rectangulaire par deux ailes symétriques, inclinées chacune sur un plan contenant AB, et perpendiculaire au plan de symétrie, d'un angle γ compris entre 0 et 37°. φ étant alors compris entre les valeurs (0 et 64°) pour lesquelles le couple redressant est maximum, une faible variation de φ créera une forte variation du couple redressant. La stabilité sera bonne[2]).

Voilà pourquoi nous avons choisi, pour angle des deux ailes entre elles, un angle variant entre 120° et 160°.

---

[1]) Si on porte en abcisses l'angle φ, et en ordonnées le moment M, on obtient une courbe analogue à la courbe de stabilité d'un navire (fig. 11). Dans la partie descendante de cette courbe, après le maximum, il ne peut y avoir équilibre stable entre la couple M et un couple constant.

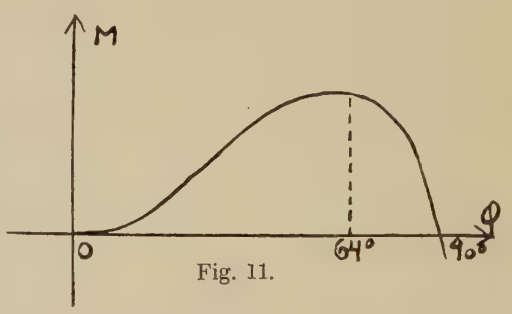


Fig. 11.

[2]) Cette étude de la stabilité de forme du panneau est sommaire. Signalons toutefois l'intérêt qu'il y a à donner à j une valeur voisine de 30°. A partir de l'incidence de 30° des filets d'eau la poussée sur les ailes croît brusquement. Il en résulte un accroissement brusque du moment redressant. En effet, l'aile en avant (fig. 12) a une incidence supérieure à 30°, et l'effort de l'eau sur cette aile croît brusquement et très

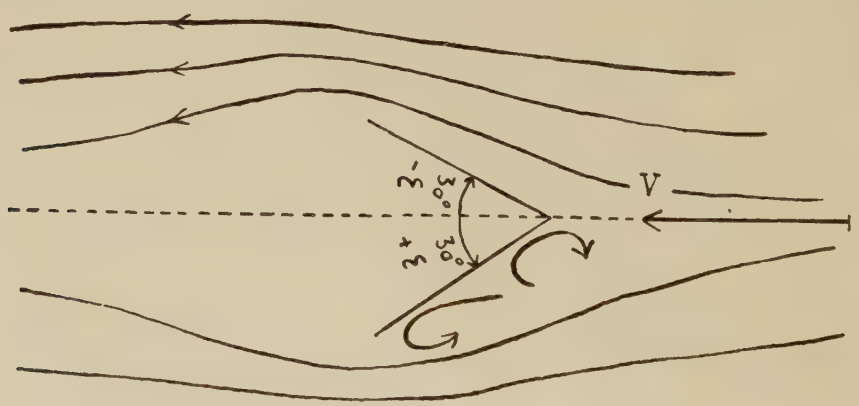


Fig. 12.

vite, alors que l'aile en arrière reçoit, sous une incidence inférieure à 30°, l'eau dont la poussée est alors très faible.

Le plan directeur augmente la stabilité autour de Oz. Son centre de poussée doit être le plus sur l'AR possible.

Le dièdre terminant vers l'AR le plan directeur supprime les battements de celui-ci autour de sa position d'équilibre (dans le plan zOy)[1]).

Toutes ces considérations sont banales dans la technique aéronautique. Mais il était indispensable de les rappeler, pour montrer comment nos panneaux ont été conçus pour tenir compte des différents facteurs de l'équilibre (poids et forme).

II.

Equilibre d'un fil pesant, homogène, remorqué dans l'eau à vitesse constante.

Ce problème s'est posé quand nous avons voulu connaître la forme d'équilibre d'une aussière plongée dans l'eau, et remorquée par le navire à une vitesse uniforme V.

Par raison de symétrie[2]), la courbe est dans le plan vertical contenant la vitesse du point où l'aussière se fixe à bord du navire remorqueur (cette vitesse, représentée par le vecteur V, est horizontale).

Prenons deux axes de coordonnées dans le plan du fil: Oy vertical, et dirigé positivement vers le haut, et Ox horizontal, dirigé comme la vitesse du navire (donc, en sens inverse de la vitesse relative de l'eau par rapport au fil). Ce système d'axes est lié au navire; mais la position du point O par rapport au navire, et au fil, n'est pas encore fixée: nous verrons comment il convient de choisir cette position, d'après les constantes d'intégration.

Soit un élément ds du fil. p est la densité linéaire du fil, c'est-à-dire son poids (en kgs) par unité de longueur (par mètre courant) (fig. 13).

Les forces dues à la résistance exercée par l'eau en mouvement sur un élément ds du fil peuvent se décomposer ainsi:

1° si les filets d'eau animés de la vitesse V rencontrent l'élément normalement, il en résulte une force appliquée à l'élément, normalement à lui, et égale à

$$kV^2 ds.$$

k est un coefficient sensiblement indépendant de la vitesse (expériences de Joëssel, dans l'eau, et d'Eiffel, dans l'air). La force exercée sur l'unité de lon-

---

[1]) L'angle du dièdre doit avoir 60°, pour une raison identique à celle que nous venons d'exposer.

[2]) La raison de symétrie n'est pas entièrement satisfaisante. Il faudrait, pour la rigueur du raisonnement, prendre 3 plans de coordonnées, y projeter les forces agissant sur chaque élément du fil, et constater que leur résultante est bien dans un plan de direction fixe. Le plan osculateur de la courbe aura cette direction fixe, et la courbe sera plane.

gueur du fil, rencontré normalement, est kV^2, exprime en kgs, V étant exprimé en m/sec.

k sera sensiblement proportionnel à la surface du contour apparent du corps immergé projeté sur un plan perpendiculaire à la direction de la vitesse[1]).

Toutes choses égales d'ailleurs, k dépendra de la nature de la surface de l'aus-

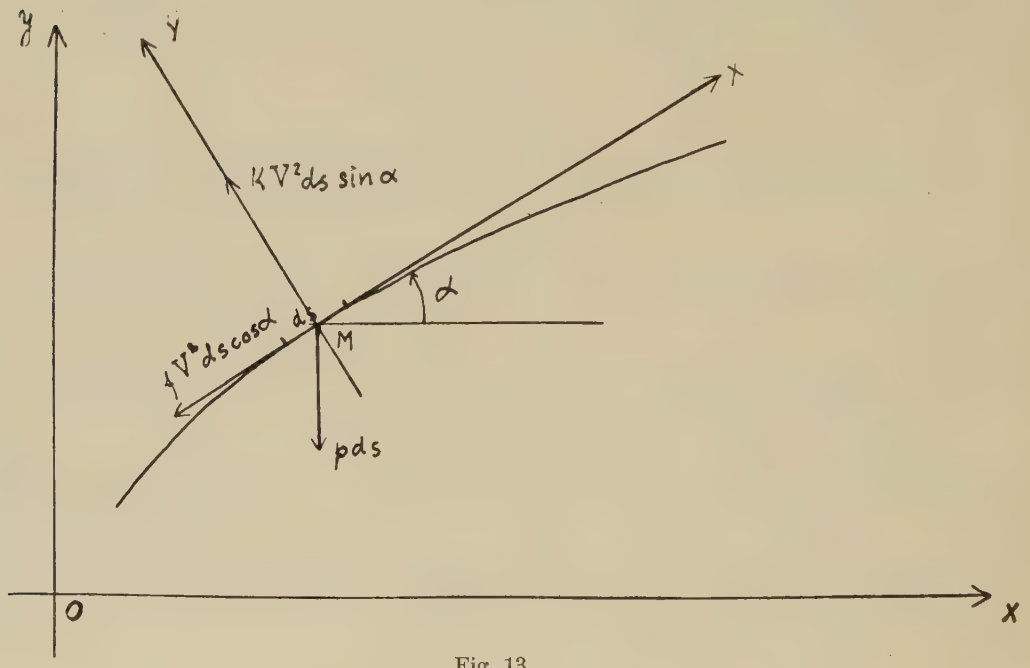


Fig. 13.

sière. Toutes les aussières sont semblables, puisqu'elles sont toutes approximativement cylindriques, mais leur surface est plus ou moins rugueuse, ce qui influe sur la résistance de rencontre. Cette résistance ne sera pas la même pour une aussière ou un cordage en fil d'acier ou un cordage en chanvre[2]).

2° lorsque l'élément de fil est dirigé parallèlement à la vitesse des filets d'eau, la résistance de rencontre n'existe plus, mais la résistance de l'eau produit une force, dirigée selon l'élément, et égale à

$$fV^2ds.$$

[1]) Cela n'est pas tout à fait exact: k depend, non seulement de la surface, mais encore de la forme du contour apparent. A surface égale, k est plus grand pour un corps plus allongé. Si a est le diamètre de l'aussière, k/a, au lieu d'être indépendant de a, diminuera quand a croîtra.

[2]) Cela est intuitif; nous ne l'avons pas vérifié par nos mesures, car nous avons toujours opéré avec de l'aussière en fil d'acier.

f est le coefficient de frottement de l'eau sur la surface latérale du cylindre constituant l'élément. f est sensiblement indépendant de la vitesse, ce qui revient à dire que la résistance de frottement est proportionnelle au carré de la vitesse, comme la résistance de rencontre[1]).

Pour les unités, les conventions pour f sont les mêmes que pour k. Ces deux facteurs ont mêmes dimensions. f est proportionnel à la surface latérale de l'élément d'aussière de longueur unité. f est donc proportionnel au diamètre de l'aussière.

Dans le cas général où l'élément de fil n'est ni normal, ni tangent aux filets d'eau, on peut décomposer les forces qui s'exercent sur lui en une force normale due à la résistance de rencontre, et une force tangentielle provenant de la résistance de frottement.

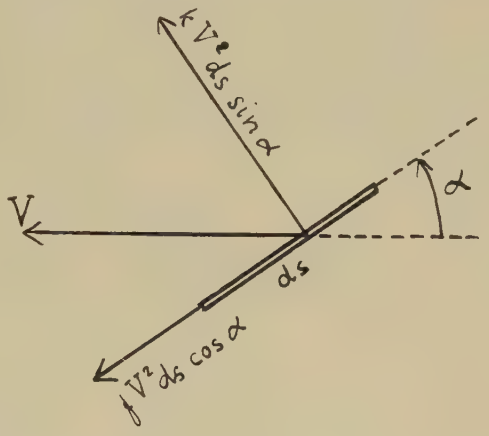


Fig. 14.

Désignons par α l'angle que fait l'élément de fil avec l'axe des x. Les cos directeurs de l'élément sont $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$.

La force due à la résistance de rencontre est normale à l'élément, et égale à

$$kV^2\, ds \sin\alpha.$$ [2])

---

[1]) Cette conclusion traduit de façon commode mais approximative la loi de la résistance de frottement. Cette résistance, en réalité, est proportionnelle à une certaine puissance m de la vitesse. m avait été trouvé par les premiers expérimentateurs (Joëssel, Froude), égal à 1,75 environ, pour des planches de bois poli. Pour des surfaces plus rugueuses, m atteint 2,2. Il est donc assez légitime de dire que la force due au frottement croît comme le carré de la vitesse.

[2]) Les expériences et les théories, pour le cas simple du plan mince, conduisent aux conclusions discordantes suivantes: pour un plan donné, et une vitesse V déterminée, la résistance normale a été trouvée proportionnelle à $\sin\alpha$ (Newton); $\sin^2\alpha$ (Euler); $\sin\alpha\,(0{,}2 + 0{,}3 \sin\alpha)$ (Joëssel). Les expériences plus récentes de Mathias, d'Eiffel, s'accordent pour trouver un maximum et un minimum à la résistance de rencontre, pour des valeurs de α comprises entre 0 et 90°. M. Rateau a expliqué ces variations étranges de la résistance de rencontre par une discontinuité au voisinage de l'incidence de 30°. Au-des-sous de cette incidence, les filets d'eau empruntent un certain trajet, et, au-dessus, un trajet brusquement différent. Cette considération, excellente pour le plan mince, ne semble pas s'appliquer aussi logiquement à un cylindre, comme l'est un élément d'aussière.

Dans les formules de Joëssel, l'expression $(0{,}2 + 0{,}3 \sin\alpha)$ est la traduction analytique d'un phénomène physique bien spécial: l'action de l'eau sur les bords du plan. Dans le cas d'une aussière qui est un cylindre indéfini, il n'y a pas de bords.

Cette discussion, à peine exquissée, demanderait une justification expérimentale. En attendant, il est logique d'admettre la proportionnalité à $\sin\alpha$.

La résistance de frottement, tangente à l'élément de fil, est égale à[1]):

$$fV\,ds\cos\alpha$$

Prenons un point courant M sur l'élément ds (fig. 13), et considèrons deux axes de coordonnées rectangulaires, MX et MY, qu'on rendrait parallèles à Ox et Oy, et de même sens, par une rotation de $-\alpha$. MX est tangent à la courbe d'équilibre du fil, et OY lui est normal, au point M.

Projetons sur OX et OY les forces s'exerçant sur l'élément ds:

$$\text{sur } OX \begin{cases} \text{tensions: } -T \text{ et } +T+dT \\ \text{poids: } \quad -pds\,\dfrac{dy}{ds} \\ \text{résistance de l'eau (frottement): } -fV^2\,ds\,\dfrac{dx}{ds} \end{cases}$$

$$\text{sur } OY \begin{cases} \text{tensions: } +Td\alpha \\ \text{poids: } \quad -pds\,\dfrac{dx}{ds} \\ \text{résistance de l'eau (rencontre): } +kV^2 ds\,\dfrac{dy}{ds} \end{cases}$$

Les équations d'équilibre s'obtiennent en écrivant que le système des forces s'exerçant sur l'élément ds est nul:

$$\begin{cases} dT - pdy - fV^2\,dx = 0 & (1) \\ Td\,\alpha - pdx + kV^2\,dy = 0 & (2) \end{cases}$$

---

[1]) Les expériences sur la résistance de frottement dans la marche oblique sont rares, surtout pour les grandes incidences. D'après la théorie de M. Rateau, quand l'incidence dépasse 30°, la force tangentielle, due à la résistance de frottement, doit diminuer brusquement. En effet, à partir de cette incidence, une partie des filets d'eau est rebroussée, et frotte contre le plan en sens inverse de la vitesse (fig. 16), tendant à favoriser l'avancement.

Fig. 15.

Fig. 16.

Mais, cette théorie ne peut s'appliquer intégralement au cas d'une aussière traînée dans l'eau: les filets d'eau se partagent, et passent de part et d'autre; si, aux grandes incidences quelques-uns sont rebroussés, ce doit être exceptionellement.

A défaut d'hypothèse mieux étayée, nous admettrons donc que le frottement sur un élément de fil est proportionnel à cos α.

Ce système d'équations différentielles va nous donner y en fonction de x. Eliminons T. Posons:

$$\frac{dy}{dx} = y' = z. \tag{3}$$

$$d\alpha = \frac{dz}{1+z^2} \tag{4}$$

$$T = \frac{pdx - kV^2dy}{d\alpha} \tag{5}$$

$$T = \frac{p + pz^2 - kV^2z - kV^2z^3}{z'} \tag{6}$$

$$dT = \frac{z'(-3kV^2z^2dz + 2pzdz - kV^2dz) + z''dx(kV^2z^3 - pz^2 + kV^2z - p)}{z'^2} \tag{7}$$

L'équation différentielle du 3ème ordre en y''', y'', y', x (dans laquelle x n'apparaît pas), provenant de l'élimination de la tension T, est donc réduite à l'équation différentielle (8), en z'', z', z, x. Cette équation est du 2ème ordre, mais non linéaire. Elle ne renferme pas x:

$$z''(kV^2z^3 - pz^2 + kV^2z - p) - z'^2(3kV^2z^2 - pz + kV^2 + fV^2) = 0 \tag{8}$$

Nous allons réduire encore l'ordre de cette équation, en posant

$$z' = u \tag{9}$$

d'où:

$$z'' = \frac{du}{dz}u \tag{10}$$

Il vient l'équation (11), du premier ordre, en $\frac{du}{dz}$, u, z:

$$u\frac{du}{dz}(kV^2z^3 - pz^2 + kV^2z - p) - u^2(3kV^2z^2 - pz + kV^2 + fV^2) = 0 \tag{11}$$

Les variables se séparent:

$$\frac{du}{dz} = \frac{u(3kV^2z^2 - pz + kV^2 + fV^2)}{kV^2z^3 - pz^2 + kV^2z - p} \tag{12}$$

et,

$$\frac{du}{u} = \frac{(3kV^2z^2 - pz + kV^2 + fV^2)dz}{kV^2z^3 - pz^2 + kV^2z - p} \tag{13}$$

L'intégration de l'équation (11) revient au calcul de l'intégrale indéfinie:

$$Lu = \int \frac{3kV^2z^2 - pz + kV^2 + fV^2}{kV^2z^3 - pz^2 + kV^2z - p}\,dz \tag{14}$$

Posons:

$$\lambda = \frac{p}{kV^2} \tag{15}$$

et

$$\frac{f}{k} = \mu \tag{16}$$

La fraction sous le signe $\int$ s'écrit: $\dfrac{3z^2 - \lambda z + \mu + 1}{z^3 - \lambda z^2 + z - \lambda}$.

Les racines du polynôme du 3ème degré du dénominateur sont:

$$\begin{cases} \lambda \\ +1 \\ -1 \end{cases}$$

Le polynôme s'écrit sous la forme:

$$(z^2+1)\ (z-\lambda)$$

Nous pouvons décomposer la fraction rationnelle en éléments simples:

$$\frac{3z^2 - \lambda z + \mu + 1}{(z^2+1)(z-\lambda)} \equiv \frac{A}{(z-\lambda)} + \frac{Bz + C}{(z^2+1)} \tag{17}$$

$$3z^2 - \lambda z + \mu + 1 = Az^2 + A + Bz^2 - B\lambda z + Cz - C\lambda \tag{18}$$

$$\begin{cases} A + B = 3 \\ -B\lambda + C + \lambda = 0 \\ A - C\lambda - \mu - 1 = 0 \end{cases}$$

d'où les coefficients:

$$A = \frac{2\lambda^2 + \mu + 1}{\lambda^2 + 1} \tag{19}$$

$$B = \frac{\lambda^2 - \mu + 2}{\lambda^2 + 1} \tag{20}$$

$$C = \frac{\lambda - \lambda\mu}{\lambda^2 + 1} \tag{21}$$

d'où

$$Lz' = A\int \frac{dz}{z-\lambda} + B\int \frac{zdz}{z^2+1} + C\int \frac{dz}{z^2+1} \tag{22}$$

et

$$Lz' = AL(z-\lambda) + \frac{B}{2}L(z^2+1) + C \operatorname{arc\,tg} z + LH \tag{23}$$

où LH est une constante d'intégration dont nous verrons plus loin la signification physique.

On a finalement l'équation différentielle

$$\frac{z'}{H} = e^{\left[AL(z-\lambda) + \frac{B}{2}L(z^2+1) + C \operatorname{arc\,tg} z\right]} \tag{24}$$

équation du premier ordre en $\frac{dz}{dx}$, z, x, x n'apparaît pas. Les variables se séparent:

$$dx = \frac{1}{H}\left[(z-\lambda)^{-A}\cdot(z^2+1)^{-\frac{B}{2}}\cdot e^{-C \operatorname{arc\,tg} z}\right] \tag{25}$$

Sans intégrer le second membre, on peut faire des constatations intéressantes sur sa forme, qui peut s'écrire:

$$dx = \frac{f(z)}{H}dz \tag{26}$$

d'où, en appelant $F(z)$ une fonction primitive de $f(z)$,

$$x = \frac{F(z)}{H} + P \tag{27}$$

P étant une constante arbitraire. On a encore:

$$F(z) = H(x - P) \tag{28}$$

On peut, de là, tirer z, soit:

$$z = \varphi\left[H(x-P)\right] = \frac{dy}{dx} \tag{29}$$

les variables sont encore séparées. Or,

$$d\left[H(x - P)\right] = Hdx \tag{30}$$

d'où:

$$H\frac{dy}{d\left[H(x-P)\right]} = \varphi\left[H(x-P)\right] \tag{31}$$

En appelant $\Phi[H(x-P)]$ une primitive de la fonction $\varphi[H(x-P)]$, il vient:

$$y = \frac{1}{H}\Phi[H(x-P)] + Q \tag{32}$$

où Q est une constante arbitraire.

En faisant un changement d'axes, et prenant les nouveaux axes parallèles à Ox et Oy, on peut poser:

$$Y = y - Q \quad \text{et} \quad X = x - P$$

et l'intégrale générale de l'équation différentielle (8) est de la forme:

$$HY = \Phi(HX). \tag{33}$$

Telle est l'équation de la figure d'équilibre du fil traîné dans l'eau.

La famille de courbes répondant à l'équation différentielle (8) se compose d'une triple infinité de courbes, obtenues en faisant varier les trois constantes d'intégration H, P et Q (il y a trois constantes, parce que l'équation (8) est du 3ème ordre).

Or, sur ces trois infinités, deux sont obtenues en déplaçant la courbe, sans la déformer, parallèlement à elle-même, des quantités P, selon Ox, et Q selon Oy.

La signification physique de ce résultat analytique est très claire:

Soient P et Q les points d'attache du fil, (fig. 17) points fixes par rapport aux axes. Le fil est en équilibre. Chacun de ses points est donc fixe par rapport aux axes. On peut donc choisir sur la courbe un point quelconque Q', et dire que ce point est le point d'attache du fil. Q est le point d'attache de l'aussière à bord. Si on change ce point d'attache, et qu'on le remplace par Q', c'est-à-dire, si on change la longueur de remorque filée, on ne fait que déplacer la courbe par translation — translation par la trajectoire QQ'—, sans la déformer (analytiquement, on a changé les constantes d'intégration P et Q).[1])

Le rôle de la constante H, aussi, est fort simple: on voit immédiatement, sur l'équation (33), que changer la constante H a pour effet de déformer la courbe, en la laissant toujours semblable à elle-même. (Multiplier les abcisses et les ordonnées par le même nombre.) Le rôle de la constante H est tout à fait identique à celui du paramètre de la chaînette, avec lequel il tend à se confondre lorsque, le poids de l'aussière devenant prépondérant vis-à-vis des forces dues à la résistance de l'eau, la courbe d'équilibre du fil se rapproche d'un arc de chaînette.

---

[1]) Ce résultat peut être obtenu directement, sans aucun calcul, par un raisonnement dû à M. le Capitaine de Vaisseau Audouard, Président de la Commission Permanente de Dragage.

Mécaniquement, nous verrons que la tension du fil, toutes choses égales d'ailleurs, est d'autant plus grande que H est plus petit.

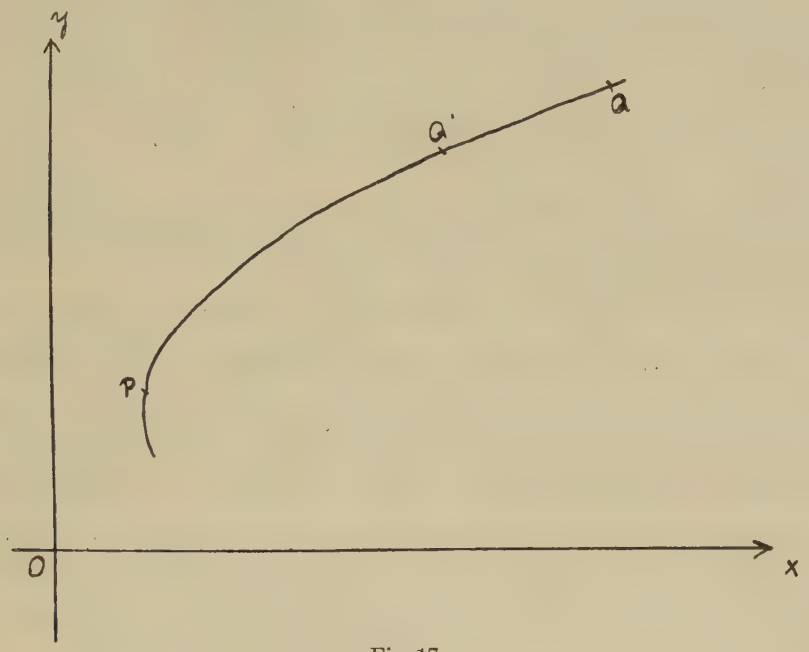


Fig. 17.

Revenons à l'équation (25). On pourrait employer, pour l'intégrer, un procédé approché, en remplaçant les trois facteurs du second membre par des développements en série limités, et écrivant l'équation (25) sous la forme:

$$ax = \frac{1}{H}\left[(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots)\,(b_0 + b_1 z + \ldots)\,(C_0 + C_1 z + \ldots)\right]. \qquad (34)$$

Mais, cela ne nous avancerait pas beaucoup, car, après avoir obtenu l'équation (27), sous une forme approchée, il nous serait impossible d'en tirer z, parce que cette équation (27) est très compliquée. Ne pouvant expliciter la fonction z de x, il nous serait impossible d'obtenir l'équation (29), et d'intégrer pour avoir (32) et (33).

Nous aurons besoin, cependant, de connaître une expression algébrique de l'intégrale définie:

$$\int\left[(z-\lambda)^{-A}\,(z+1)^{-\frac{B}{2}}\,c^{-C\,\mathrm{arc\,tg}\,z}\right]dz$$

nous emploierons pour cela certaines approximations.

Pour obtenir l'intégrale générale définie par l'equation (33), nous aurons recours à des procédés graphiques.

Prenons un axe des abcisses Oz, dirigé positivement vers la gauche, et un axe des ordonnées Ox, dirigé positivement vers le haut.

On porte dans ce système, avec z comme variable, la courbe représentative de la fonction

$$v = \frac{1}{H}\left[(z-\lambda)^{-A}(z+1)^{-\frac{B}{2}}c^{-C\,\mathrm{arc\,tg}\,z}\right]. \qquad (35)$$

On évalue la surface comprise entre cette courbe et l'axe Oz. On obtient ainsi une primitive de la fonction v de z. Cette primitive représente x, à la constante P près; on trace sa courbe.

Prenant alors Oz comme axe des ordonnées, et Ox comme axe des abcisses, la courbe précédemment tracée représente z $\left(\text{c'est-à-dire } \frac{dy}{dz}\right)$, en fonction de x. Evaluons alors l'aire comprise entre cette courbe et l'axe des x. Portons cette aire en courbe en fonction de x. On a la courbe intégrale de la courbe $z = \varphi(x)$, c'est-à-dire la courbe d'équilibre du fil, dont l'equation générale est l'équation (33).

Application numérique. Données expérimentales. Il serait long et fastidieux de se lancer dans une discussion générale, en donnant aux coefficients A, B, C, issus de l'identité (17), toutes les valeurs possibles. Nous allons calculer les coefficients A, B, C, à l'aide des données de nos expériences.

La densité linéaire du fil, p, est très facile à connaître. Un tableau du poids des aussières en fil d'acier est donné dans plusieurs ouvrages, en particulier dans le manuel du gabier. Il est d'ailleurs facile de peser directement le fil dans l'eau.[1])

Toutes nos expériences ont été effectuées avec de l'aussière en fil d'acier de 24 mm de circonférence. C'est aussi cette aussière qui nous a le plus servi dans nos recherches océanographiques. Toutes nos données numériques seront fournies pour cette aussière de 24 mm, et nous verrons ensuite, dans quelle mesure, en appliquant les règles de la similitude mécanique, on peut généraliser les résultats aux autres aussières, de même espèce, mais de grosseur différente.

Nous avons trouvé:

$$p = 0{,}16 \text{ kgs:m.}$$

Pour obtenir la résistance de rencontre, on s'appui sur la remarque suivante:

Laissons traîner l'aussière dans l'eau, librement, en ne fixant à son extrémité ni panneau, ni poids. La figure d'équilibre du fil est alors une droite[2]). Il ne s'exerce

[1]) p désigne, bien entendu, la densité linéaire du fil plongé dans l'eau de mer. Cette quantité n'est pas connue avec une précision parfaite: la poussée d'Archimède décroît quand l'âme de l'aussière est imbibée d'eau, et alors, p augmente.

[2]) Cette droite a pour équation une intégrale singulière de l'équation (8), qui est vérifiée, si on fait $z = \lambda$.

aucune force »étrangère« sur l'extrémité libre du fil. L'élément situé à cette extrémité est soumis seulement aux trois forces: poids, résistance de rencontre, résistance de frottement. La tension T au bout libre de l'élément est nulle; à l'autre bout, elle est égale à dT, faisant équilibre à la force de frottement, qui lui est opposée de direction et de sens, et à la résultante du poids et de la résistance de rencontre. Cette résultante est dirigée selon l'élément du fil. Nous allons chercher l'angle que fait sa direction avec l'horizontale (angle α_0). Composant la résistance de rencontre avec le poids, on voit tout de suite que:

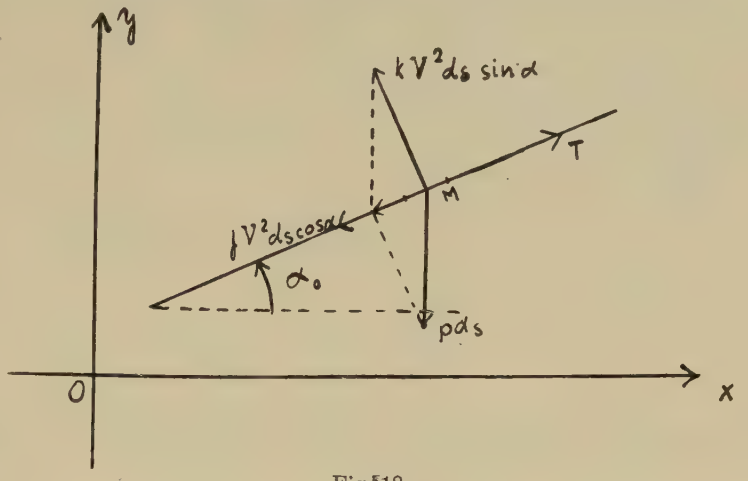


Fig. 18.

$$\frac{kV^2ds\sin\alpha_0}{pds} = \cos\alpha_0, \tag{36}$$

d'où:

$$\lambda = tg\alpha_0 = \frac{p}{kV^2}. \tag{37}$$

Or, l'élément suivant subit les mêmes forces, sauf que la tension doit être plus grande, pour équilibrer la somme des forces de frottement, lesquelles n'ont pas changé de direction. De proche en proche, on voit que les forces agissant sur un élément gardent une direction fixe. L'aussière garde une direction fixe, donc sa forme d'équilibre est rectiligne. Sa pente est λ.

Nous appellerons λ la pente naturelle de l'aussière dans les conditions données (aussière donnée, remorquée à une vitesse donnée.)

De cette remarque, on tire immédiatement une méthode pratique pour mesurer k:

On laisse traîner l'aussière librement dans l'eau, et on mesure sa pente naturelle. Pour cela, on mesure la profondeur atteinte par l'extrémité du fil. On connaît la longueur d'aussière filée. On obtient donc le sinus de l'angle α_0. On prend la tangente de cet angle, et on a la pente naturelle λ. On en déduit k:

$$k = \frac{p}{\lambda V^2}. \tag{bis 37}$$

Pour mesurer les profondeurs atteintes, le procédé le plus exact consiste à utiliser un manomètre enregistreur d'immersion[1]). Faute de mieux, nous nous sommes servis d'un tube de sondeur Thomson: l'inconvénient de cet appareil est de donner la profondeur maximum atteinte, et non pas la profondeur moyenne.

Pour mesurer la force de frottement exercée par l'eau sur le fil, on le laisse traîner, encore, sans panneau ni poids au bout. On mesure la tension[2]). On connaît la longueur d'aussière filée. On connaît la pente naturelle de l'aussière. Reprenons l'équation (1); elle s'écrit:

$$dT = (p \sin \alpha_0 + fV^2 \cos \alpha_0)\, ds, \qquad (38)$$

en intégrant, il vient:

$$T = (p \sin \alpha_0 + fV^2 \cos \alpha_0)\, s + Cte \qquad (39)$$

la constante d'intégration est nulle, dans le cas de l'expérience, puisque, lorsque la longueur filée s est nulle, la tension est nulle.

Les expériences nous donnent les résultats suivants, plusieurs fois vérifiés:

avec 400 m d'aussière, atteint la profondeur de 25 m
— 650 m — — - — - 40 m
— 1430 m — — - — - 86 m

Donc, $\sin \alpha_0 = 0{,}06$ et $\alpha_0 = 3°{,}5$

et $$\lambda = \operatorname{tg} \alpha_0 = 0{,}06.$$

Comme $V = 10$ nœuds $= 5$ m/s et $p = 0{,}16$ kgs/m

$$k = \frac{0{,}16}{25 \times 0{,}06} = 0{,}11.$$

Et pour le frottement, que nous avons mesuré pour plusieurs longueurs filées, nous avons vérifié qu'il était proportionnel à cette longueur, et que, pour 1000 m de longueur filée, à la vitesse de 6 nœuds (3 m/s), la tension du fil était de 100 kgs. A cette vitesse, on a:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{p}{kV^2} = \frac{0{,}16}{0{,}99} = 0{,}1667$$

---

[1]) C'est le procédé employé à la Commission Permanente de Dragage. Le manomètre Richard employé est enfermé dans un poisson de tôle.

[2]) Nous n'avions, pour cela, qu'une balance romaine.

$$\alpha_0 = 9°,5 \qquad \sin\alpha_0 = 0,1645 \qquad \cos\alpha_0 = 0,9864$$

$$T = (0,0263 + f \cdot 8,8776)\, s$$

et

$$f = \frac{0,1000 - 0,0263}{8,8776} = 0,0083$$

d'où $\mu = 0,0755.$

Calcul des coefficients A, B, C. —

1^0 $\lambda = 0,0000$ $\mu = 0,755$

$\lambda^2 = 0,0000$

$$A = \frac{0,0000 + 0,0755 + 1,0000}{1,0000} = 1,0755$$

$$B = \frac{0,0000 + 2,0000 - 0,0755}{1,0000} = 1,9245$$

$$C = 0,0000$$

$$\begin{cases} A = 1,076 \\ B/2 = 0,962 \\ C = 0,000 \end{cases}$$

2^0 $\lambda = 0,0300$ $\mu = 0,0755$

$\lambda^2 = 0,0000$

$$A = \frac{0,0018 + 0,0755 + 1,0000}{1,0009} = 1,076$$

$$B = \frac{0,0009 + 2,0000 - 0,0755}{1,0009} = 1,924$$

$$C = \frac{0,03 \cdot (1,0000 - 0,0755)}{1,0009} = 0,022$$

$$\begin{cases} A = 1,076 \\ B/2 = 0,962 \\ C = 0,022 \end{cases}$$

3^0 $\lambda = 0,0600$ (vitesse 10 nœnds) $\mu = 0,0755$

$\lambda^2 = 0,0036$

$$A = \frac{0,0072 + 0,0755 + 1,0000}{1,0036} = 1,079$$

$$B = \frac{0{,}0036 - 0{,}0755 + 2{,}0000}{1{,}0036} = 1{,}921$$

$$C = \frac{0{,}06\ (1 - 0{,}0755)}{1{,}0036} = 0{,}055$$

$$\begin{cases} A = 1{,}079 \\ B/2 = 0{,}961 \\ C = 0{,}055 \end{cases}$$

4° $\lambda = 0{,}0909$ (vitesse 8 nœnds) $\mu = 0{,}0755$

$\lambda^2 = 0{,}0081$

$$A = \frac{0{,}0161 + 0{,}0755 + 1{,}0000}{1{,}0081} = 1{,}083$$

$$B = \frac{0{,}081 - 0{,}0755 + 2{,}0000}{1{,}0081} = 1{,}917$$

$$C = \frac{0{,}09\,(1 - 0{,}0755)}{1{,}0081} = 0{,}083$$

$$\begin{cases} A = 1{,}083 \\ B/2 = 0{,}859 \\ C = 0{,}083 \end{cases}$$

Extension des résultats numériques à d'autres aussières. — Lorsque l'on fait des expériences avec une autre aussière, voyons en quoi seront changés les résultats.

Nous avons vu que les coefficients k et f sont sensiblement proportionnels, toutes choses égales d'ailleurs, pour des aussières semblables, au diamètre (ou ce qui revient au même) à la grosseur de l'aussière. Pour deux aussières semblables (même nature, même nombre de torons, etc.), μ ne dépend donc pas de la grosseur de l'aussière.

La courbe d'équilibre d'une certaine aussière remorquée à une vitesse donnée ne diffèrera de la courbe d'équilibre d'une autre aussière à une autre vitesse que parce que les pentes naturelles ne seront pas les mêmes (laissant de côté, pour l'instant, les constantes d'intégration P, Q et H, dont nous avons vu le rôle).

Si on trace un réseau de courbes avec des λ différents, on n'aura qu'a choisir, parmi ces courbes, celle dont le λ est égal à la pente naturelle de l'aussière dont on dispose, traînée à la vitesse connue du navire. La courbe choisie sera semblable à la courbe d'équilibre cherchée de l'aussière.

Nous allons tracer une partie de ce réseau.

Tracé des courbes. Etudions les variations de la fonction

$$v = \frac{1}{H}\left[(z-\lambda)^{-A}(z^2+1)^{-\frac{B}{2}} e^{-C \operatorname{arc\,tg} z}\right]$$

en prenant $H = -1$ (nous verrons plus loin la simplification apportée par le choix d'un H négatif).

La fonction est toujours du signe contraire à $(z - \lambda)$.

Quand z tend vers λ, la fonction v croît au-delà de toute limite.

Quand z croît indéfiniment, par valeurs négatives, v tend vers 0 par valeurs positives.

Quand z croît indéfiniment, par valeurs positives, v tend vers 0 par valeurs négatives.

On a donc les branches infinies de la courbe.

Pour dériver v par rapport à z, reprenons la forme (24):

$$v = -e^{\left[-AL(z-\lambda) - \frac{B}{2}L(z^2+1) - C \operatorname{arc\,tg} z\right]}.$$

On a immédiatement:

$$\frac{dv}{dz} = -v\left(\frac{A}{z-\lambda} + \frac{Bz}{z^2+1} + \frac{C}{z^2+1}\right) \tag{40}$$

ou, en additionnant les éléments simples de la fraction déjà connue:

$$\frac{dv}{dz} = -v\,\frac{3z^2 - \lambda z + \mu + 1}{(z^2+1)(z-\lambda)} \tag{41}$$

La dérivée est toujours positive[1]).

L'allure générale de la courbe est donnée par la figure 19:

Le point $(\lambda, 0)$ n'est pas un centre de symétrie. La courbe ne ressemble que très vaguement à une hyperbole équilatère.

A partir d'une abcisse $z_0 > \lambda$, arbitrairement choisie, portons la courbe intégrale de la courbe v, en faisant croître z. Si on fait décroître z, à partir de z_0 et qu'on porte, de la même façon, les aires, on a l'autre partie de la courbe intégrale, mais changée de signe. En effet, on a remplacé dans chaque élément de l'inté-

---

[1]) L'expression $(z-\lambda)^{-A}$ n'est pas une fonction continue de A. Si on fait varier A, c'est-à-dire λ et μ de façon continue, v tantôt existe (si A est un entier impair, par exemple), et tantôt est imaginaire. C'est inconcevable au point de vue physique. Cela provient de l'introduction des logarithmes dans l'intègration de la fraction rationelle. Il convient, pour rétablir un résultat sensé, de remplacer $(z-\lambda)^{-A}$ par $-(z-\lambda)^{-A}$, lorsque $(z-\lambda)$ est négatif.

grale indéfinie dz par $-dz$. Il suffit, pour avoir la vraie courbe intégrale, de retourner, autour de l'axe Oz, cette dernière partie de la courbe intégrale.

Même opération pour la partie de la courbe intégrale correspondant à l'autre branche de la courbe v: $(z < \lambda)$. On choisit alors une abcisse initiale z, inférieure à λ.

On a donc la courbe représentant les variations de x en fonction de z. Etudions la forme de cette courbe.

Quand z croît de $-\infty$ à λ, x croît constamment (puisque sa dérivée est posi-

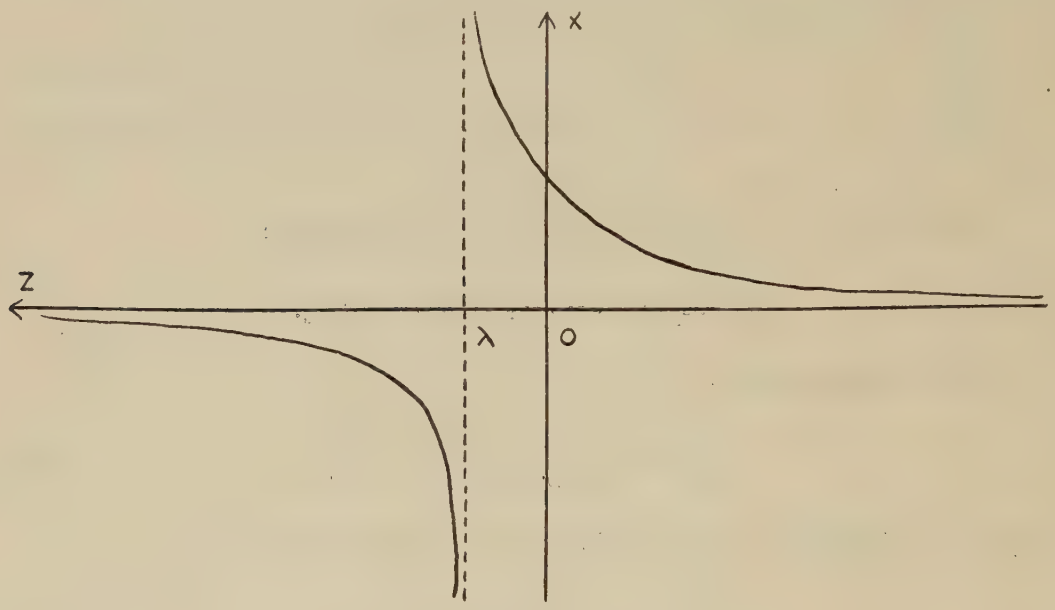


Fig. 19.

tive). Cette branche de la courbe a une direction asymptotique parallèle à Oz. Quand z tend vers λ, la tangente à la courbe tend à devenir parallèle à l'axe des x.

Quand z part de λ et croît indéfiniment, x décroît constamment. La tangente à la courbe part du parallélisme à l'axe des x, et quand z croît indéfiniment, la courbe a une direction asymptotique parallèle à l'axe Oz.

La concavité de la courbe x est toujours tournée vers les x positifs.

Etudions les branches infinies. Quand z est très grand, positif ou négatif, la courbe se rapproche d'une asymptote parallèle à l'axe des z.

En effet, l'aire représentant $\int_{z_0}^{+\infty} v dz$ est finie. On peut trouver une limite supérieure et une limite inférieure de cette aire.

Remplaçons $(z - \lambda)^{-A}$ et $(z^2 + 1)^{-\frac{B}{2}}$ par des infiniment petits à peu près équivalents, soit respectivement $(z - \lambda)^{-1}$ et $(z^2 + 1)^{-1}$. Remplaçons $e^{-C \operatorname{arc\,tg} z}$

par une constante $e^{-C \operatorname{arc\,tg} z_0}$, sûrement plus grande que toutes les valeurs de $e^{-C \operatorname{arc\,tg} z}$ correspondant à des valeurs de z comprises dans l'intervalle $z_0 + \infty$, puis par une constante $e^{-C\frac{\pi}{2}}$, sûrement plus petite que toutes les valeurs de $e^{-C \operatorname{arc\,tg} z}$ correspondant à des z compris dans le même intervalle[1]).

On obtiendra ainsi deux limites de la valeur de l'intégrale définie $\int v dz$. En prenant z_0 suffisamment grand, les deux limites seront suffisamment rapprochées pour donner une position précise de l'asymptote.

Nous admettrons, en nous contentant pour toute démonstration d'invoquer la raison de continuité, que l'asymptote est la même droite, pour les deux branches infinies de la courbe x parallèles à l'axe des z, quand z croit indéfiniment, par valeurs positives et négatives. Si on n'admettait pas cela, on trouverait une discontinuité dans la courbe d'équilibre du fil dont l'équation générale est (33).

Nous choisirons la constante P de telle sorte que l'asymptote en question soit confondue avec l'axe des z. Cela simplifiera nos figures.

La courbe x a une autre asymptote, qui est l'ordonnée d'abcisse λ. Quand z tend vers λ, v tend à prendre la forme:

$$v = \frac{(\lambda^2+1)^{-\frac{B}{2}}\, e^{-C \operatorname{arc\,tg} \lambda}}{H} \left[(z-\lambda)^{-A}\right] \tag{42}$$

c'est-à-dire le produit par un coefficient fini, de $(z-\lambda)^{-A}$. Nous pouvons trouver les valeurs que prend ce coefficient, quand z est voisin de λ. Si m est un minimum de ce coefficient, on a:

$$\left|\int_{z_0}^{\lambda} v dz\right| > m \left|\int_{z_0}^{\lambda} (z-\lambda)^{-A} dz\right| \tag{43}$$

or:

$$\int (z-\lambda)^{-A} dz = \frac{1}{1-A} (z-\lambda)^{1-A} \tag{44}$$

$(z-\lambda)^{1-A}$ croît indéfiniment quand z tend vers λ, parce que 1—A est négatif.

On peut donc tracer la courbe représentant x en fonction de z. La figure 20 en montre l'allure schématique.

Calcul de l'asymptote parallèle à Oz. — On a décidé de faire une approximation pour le calcul de l'intégrale définie $\int_{z_0}^{+\infty} v dz$. Les limites cherchées, entre lesquelles se trouvera cette intégrale seront:

---

[1]) Nous avons toujours pris, implicitement, pour arctg z, l'arc compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Pouravoir la famille complète des courbes, il faudrait ajouter $n\pi$ à cet arc. Mais, cela revient à multiplier $e^{-C \operatorname{arc\,tg} z}$ par $e^{-Cn\pi}$, coefficient constant, qui peut être compris dans la constante H. En faisant varier H de façon continue, on obtient toutes les courbes de la famille, sans en omettre.

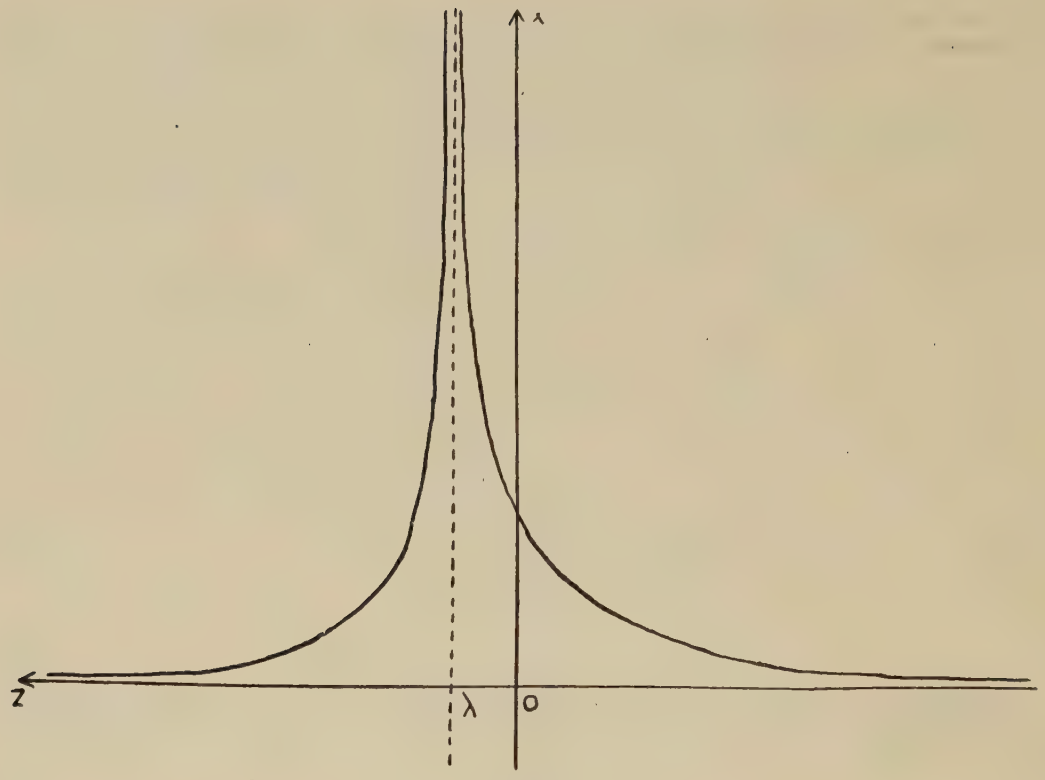


Fig. 20.

$$\frac{1}{H}\, e^{-c \operatorname{arc\,tg} z_0} \int_{z_0}^{+\infty} \frac{dz}{(z-\lambda)(z^2+1)}$$

et:

$$\frac{1}{H}\, e^{-c\frac{\pi}{2}} \int_{z_0}^{+\infty} \frac{dz}{(z-\lambda)(z^2+1)}$$

Calculons l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{dz}{(z-\lambda)\,(z^2+1)}$$

Décomposons la fraction rationnelle en éléments simples:

$$\frac{1}{(z-\lambda)(z^2+1)} = \frac{A'}{(z-\lambda)} + \frac{B'z+C'}{(z^2+1)} \qquad (45)$$

$$1 \equiv A'z^2 + A' + B'z^2 + C'z - B'\lambda z - C'\lambda \qquad (46)$$

$$\text{d'où} \begin{cases} A' + B' = 0 \\ C' + B'\lambda = 0 \\ A' - C'\lambda = 1 \end{cases}$$

$$\text{d'où l'on tire} \begin{cases} A' = +\dfrac{1}{\lambda^2+1} \\ B' = -\dfrac{1}{\lambda^2+1} \\ C' = -\dfrac{\lambda}{\lambda^2+1} \end{cases}$$

L'intégrale indéfinie cherché est:

$$\int \frac{dz}{(z-\lambda)(z^2+1)} = \frac{1}{\lambda^2+1}\left[L(z-\lambda) - \frac{1}{2}L(z^2+1) - \lambda \operatorname{arc\,tg} z\right] \qquad (47)$$

et l'intégrale définie $\int_{z_0}^{+\infty} vdz$ est comprise entre les bornes:

$$-\frac{e^{-C \operatorname{arc\,tg} z_0}}{(\lambda^2+1)}\left[-\lambda\frac{\pi}{2} - L\frac{z_0-\lambda}{\sqrt{z_0^2+1}} + \lambda \operatorname{arc\,tg} z_0\right]$$

et

$$-\frac{e^{-C\frac{\pi}{2}}}{(\lambda^2+1)}\left[-\lambda\frac{\pi}{2} - L\frac{z_0-\lambda}{\sqrt{z_0^2+1}} + \lambda \operatorname{arc\,tg} z_0\right].$$

Les valeurs numériques des limites sont:

$$1^o \quad \lambda = 0{,}0000 \qquad \lambda^2 = 0{,}0000 \qquad C = 0{,}0000 \qquad z_0 = 1$$

la quantité entre crochets est égale à $L\sqrt{2}$; les deux bornes de l'intégrale définie se confondent, et l'on peut prendre:

$$\int_{+1}^{+\infty} vdz = -0{,}3465.$$

On prendra: $P = 0{,}3465$.

$$2^o \quad \lambda = 0{,}0300 \qquad \lambda^2 = 0{,}0009 \qquad C = 0{,}022 \qquad z_0 = 1$$

la quantité entre crochets est égale à 0,3533. Les bornes cherchées sont 0,3410 et 0,3469. On prendra: $P = 0{,}344$

$$3^\circ \quad \lambda = 0,0600 \qquad \lambda^2 = 0,0036 \qquad C = 0,055 \qquad z_0 = 1$$

(ce qui correspond à la vitesse de 10 nœuds); la quantité entre crochets est égale à 0,3613. Les bornes cherchées sont 0,3302 et 0,3448. On prendra: $P = 0,338$

$$4^\circ \quad \lambda = 0,0900 \qquad \lambda^2 = 0,0081 \qquad C = 0,083 \qquad z_0 = 1$$

(ce qui correspond à la vitesse de 8 nœuds); la quantité entre crochets est égale à 0,3702. Les bornes cherchées sont 0,3223 et 0,3440. On prendra: $P = 0,333$.

Lorsque λ augmente, la courbe représentant v en fonction de z s'éloigne de l'axe des z, son asymptote, et, de plus, C croissant, les bornes de l'intégrale définie s'écarte. Il faudrait donc prendre des valeurs plus grandes de z_0.

Nous allons maintenant prendre Ox comme axe des abcisses, et Oz comme axe des ordonnées, en l'appelant Oy. On a, dans ce système, la courbe représentant z, c'est-à-dire $\frac{dy}{dx}$, en fonction de x. En prenant la courbe intégrale de cette courbe, on aura la courbe cherchée, représentant la fonction (33), la courbe d'équilibre du fil.

Evaluons la somme:

$$\int_{x_0}^{x} z dx.$$

On prend $x_0 = 0$. Pour que l'intégrale considéré ait encore un sens, il faut que l'aire comprise entre la courbe z et son asymptote l'axe Oy, soit finie. C'est justement le cas. En effet, on pourrait aisément établir la proposition suivante:

v étant constitué par le produit de deux fonctions de z, l'une $\frac{e^{-C \operatorname{arc\,tg} z}}{H}$, qui reste finie et non nulle quand z croît indéfiniment, l'autre, $(z-\lambda)^{-A}(z+1)^{-\frac{B}{2}}$ de degré inférieur à -2, en intégrant deux fois cette fonction, on a encore une fonction qui reste finie quand z croît indéfiniment.

Sans faire appel à ce lemme général, on peut avoir recours, encore à l'approximation qui consiste à remplacer A et $\frac{B}{2}$ par 1. L'aire comprise entre la courbe z, son asymptote Oy, et une parallèle à l'axe Ox, s'obtient en intégrant deux fois le produit par un facteur K, constant de la fraction rationelle

$$\frac{1}{(z-\lambda)(z^2+1)}.$$

La première intégration donne:

$$\frac{\lambda^2+1}{K}\left[L(z-\lambda)-\frac{1}{2}L(z^2+1)-\lambda \operatorname{arc\,tg} z\right]$$

et, en intégrant une seconde fois, on verrait sans peine que

$$\frac{K}{\lambda^2+1}\int_{z_0}^{+\infty}\left[L(z-\lambda)-\frac{1}{2}L(z^2+1)-\lambda \operatorname{arc\,tg} z\right]dz$$

reste fini quand z croît indéfiniment (sans franchir la valeur λ).

Mais il serait long de trouver l'aire comprise entre la courbe z et son asymptote. Nous ne chercherons pas cette aire, nous contentant de savoir qu'elle est finie.

On fera varier x de 0 à $+\infty$; on a vu, en effet, dans l'étude de la fonction x de z, que x n'était jamais inférieur à l'ordonnée de son asymptote, et nous avons pris cette asymptote pour axe Oz (et Oy).

Supposons que nous connaissions l'aire comprise entre la courbe z et l'axe Oy; prenons la constante Q en conséquence, de telle sorte que y soit nul quand x est nul.

La courbe y est composée de deux branches[1]), car pour chaque valeur de x, il existe deux valeurs de y; la branche inférieure a sa concavité tournée vers les y positifs, la branche supérieure vers les y négatifs, à cause du signe de la dérivée seconde.

La branche supérieure de la courbe est toujours croissante, à cause du signe de la dérivée première (courbe z). La branche inférieure a un minimum, dont l'abcisse est celle du point où la courbe z coupe l'axe des x. Quand x est inférieur à cette abcisse, la courbe y décroît, supérieur, y croît.

Quand x croît indéfiniment, la courbe a une direction asymptotique, dont la pente est λ.

Quand $x = 0$, la courbe est tangente à l'axe Oy.

Cherchons si la courbe y a des asympotes dans la direction asymptotique λ. Elle en aura si l'aire est comprise entre la courbe z et son asymptote, l'abcisse d'ordonnée λ.

Considérons encore x comme fonction de z. Quand z tend vers λ, la valeur asymptotique de x est égale au produit, par un coefficient constant J, de $(z-\lambda)^{1-A}$. En remplaçant x par sa valeur asymptotique, l'aire comprise entre la courbe z, son asymptote, l'axe des z, et une ordonnée fixe, parallèle à Ox, est égale à:

$$\frac{J}{2-A}(z-\lambda)^{2-A}.$$

---

[1]) C'est pour que ces deux branches se raccordent sans discontinuité que nous avons invoqué la raison de continuité.

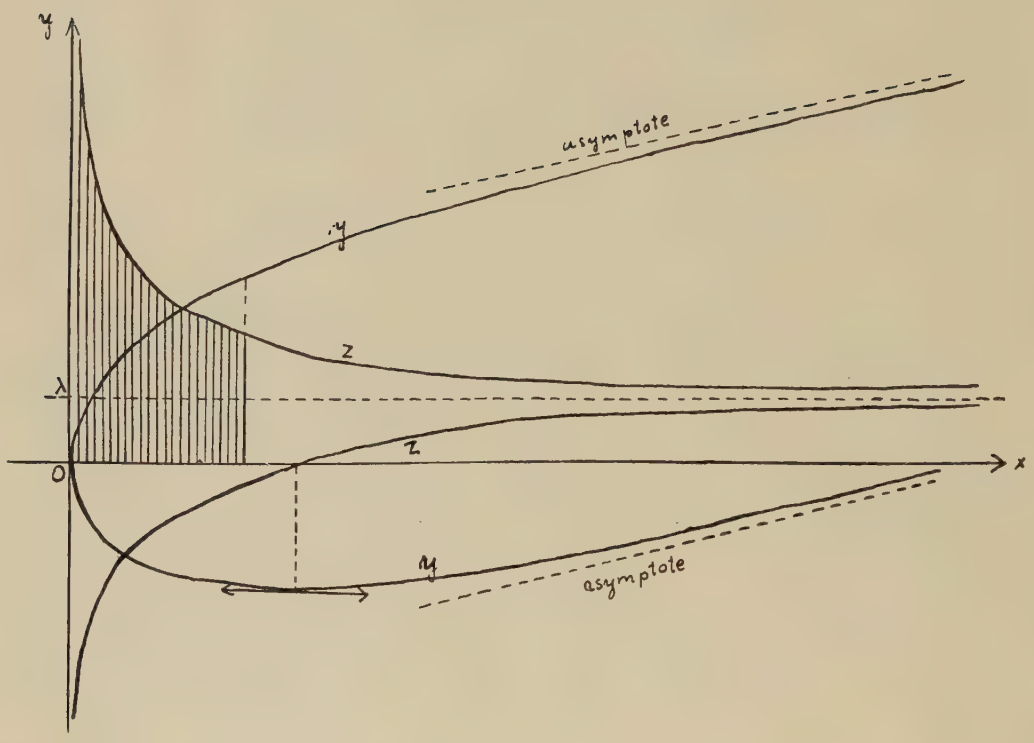


Fig. 21.

Cette quantité reste finie quand z tend vers λ si $2-A$ est positif. Cette condition est réalisée, dans le cas pratique qui nous occupe; elle l'est, d'une façon générale, si

$$A < 2$$

ou:
$$\frac{2\lambda^2+\mu+1}{\lambda^2+1} < 2$$

soit,
$$\mu < 1 \qquad \text{ou bien} \quad f < k$$

L'existence de l'asymptote de pente λ dépend donc seulement de la nature de l'aussière. Avec des aussières à fort coefficient de frottement, il se pourrait qu'il n'y ait pas d'asymptote à la courbe y.

En résumé, avec l'aussière utilisée (et, probablement, avec toutes les aussières utilisées dans la pratique), la courbe d'équilibre est comprise entre deux asymptotes parallèles, inclinées de la pente λ sur l'horizontale.

Lorsque la résistance de rencontre diminue, le coefficient k décroît; les deux

asymptotes se rapprochent de la verticale et s'éloignent l'une de l'autre[1]). Toutes choses égales d'ailleurs, les asymptotes s'éloignent lorsque la valeur absolue de H diminue.

Quand le poids devient négligeable devant la résistance de rencontre, les asymptotes de la courbe deviennent horizontales[2]).

La forme générale de la courbe d'équilibre du fil est donnée sur la figure 21.

Rôle de l'objet remorqué. Nous avons trouvé la forme d'équilibre la plus générale que prend un fil pesant souple, homogène, traîné dans l'eau d'un mouvement rectiligne uniforme. La longueur du fil est indéfinie. Son mode de liaison aux axes est quelconque.

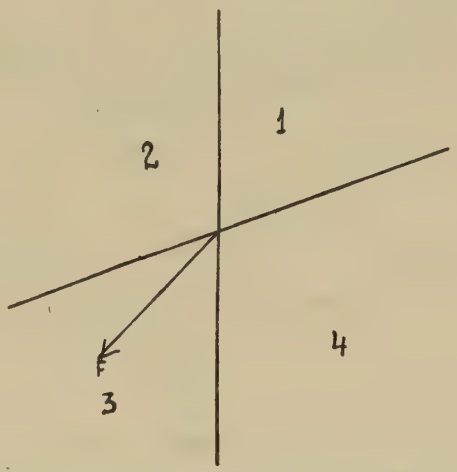


Fig. 22.

Si le fil est fixé aux axes par deux de ses points (si, par exemple, il est amarré en deux points du navire situés dans le même plan vertical) sa figure d'équilibre pourra être un arc quelconque de la courbe, admettant ou n'admettant pas de tangente verticale, admettant ou n'admettant pas de tangente horizontale. Les drisses de pavillon, à demi raidies et flottant au vent, peuvent donner une idée de l'arc de courbe en question.

---

[1]) La courbe se rapproche alors d'une chaînette à axe vertical (fig. 23). On le verrait analytiquement.

[2]) On a alors la projection horizontale d'une aussière traînée horizontalement dans l'eau (remorque du paravane, brins de drague, etc.).

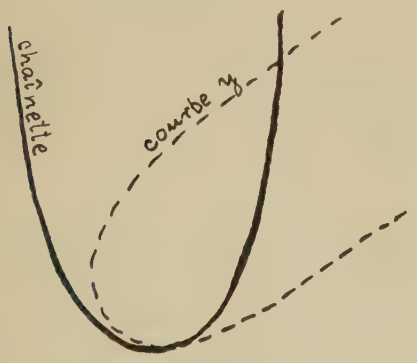


Fig. 23.

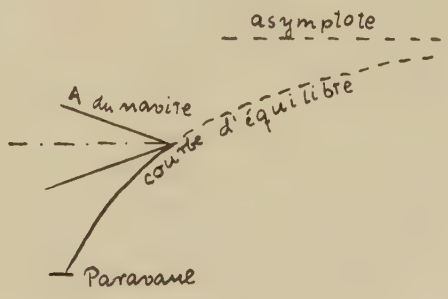


Fig. 24.

Fig. 25.

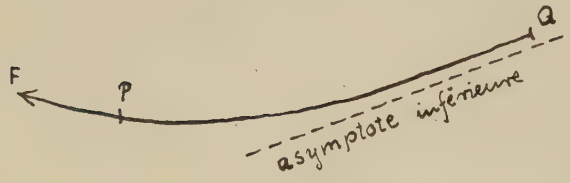


Fig. 26.

Revenons au cas qui nous occupe, où l'aussière est fixée par une de ses extrémités Q, au navire, et où l'autre extrémité P est soumise à une force F dûe à un objet remorqué par l'aussière. La verticale et la droite de pente λ divisent le plan en quatre angles, que nous numéroterons: 1, 2, 3 et 4 (fig. 22). Si la force F est dans l'angle 1, l'arc décrit par le fil a une tangente verticale, et est entièrement au-dessous du support de la force F. Si la force F est dans l'angle 2, l'arc de courbe n'a pas de tangente verticale, et sa concavité est tournée vers le haut. Si la force F est dans l'angle 3, l'arc de courbe n'a pas de tangente verticale, et sa concavité est tournée vers le bas. Enfin, si la force F est dans l'angle 4, l'arc de courbe admet une tangente verticale, et il se trouve tout entier au-dessus du support de la force F. Tout ceci est évident.

Le cas 1 (fig. 25), et le cas 4 (fig. 28) ne sont pas très intéressant, dans la pratique.

Le cas 2 (fig. 26) est celui d'une aussière, dans le remorquage d'un navire (pour la partie de l'aussière qui plonge dans l'eau, bien entendu), et, en général, de tout objet de flottabilité positive ou nulle (remorquage d'un sous-marin en plongée), ou encore, d'un objet dont les résistances de carène sont dirigées vers le haut (panneau de plongée chaviré, hydroplanant).

Le cas 3 (fig. 27) est celui qui nous intéresse spécialement: il se présente dans le cas du remorquage d'un objet à flottabilité négative, ou d'un objet

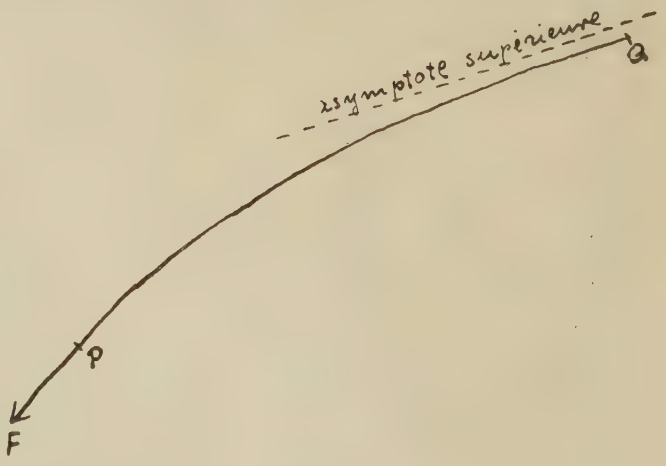


Fig. 27.

dont les résistances de carène sont dirigées vers le bas (cas d'un panneau de plongée).

L'influence du panneau de plongée sur la forme de l'arc de courbe que décrit l'aussière se fait sentir de deux façons:

Par l'angle à l'horizontale que fait l'aussière à son point d'attache sur le panneau. Cet angle ne dépend pas de la longueur de remorque filée. Avec un bon panneau, bien réglé, cet angle dépasse 45°.

Par la force appliquée au panneau. Plus cette force est grande, plus le coefficient H est petit, plus les asymptotes de la courbe sont distantes l'une de l'autre, et plus la courbe se rapproche lentement de son asymptote. La grandeur de la force appliquée au panneau dépend principalement de la surface de celui-ci, pour une vitesse donnée.

En résumé, la forme de l'arc de courbe dépend de la grandeur et de la direction de la force F.

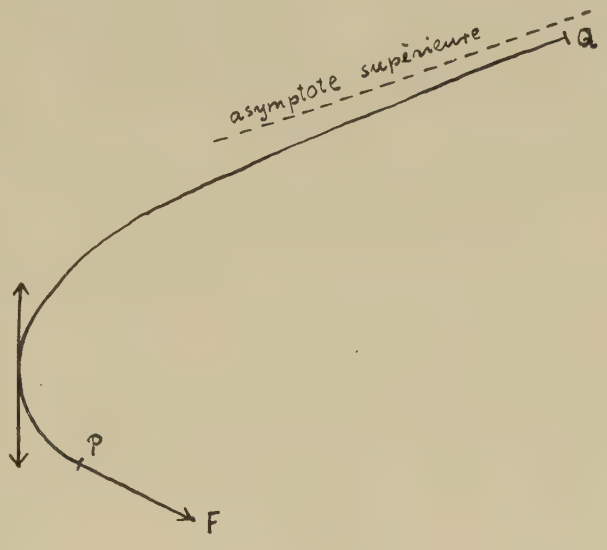


Fig. 28.

Tension. Quand on connaît la courbe, avec son échelle, (c'est-à-dire après avoir déterminé H), on peut déterminer aisément la tension du fil en un point, grâce à l'équation (2). On en tire:

$$T = \frac{pdx - kV^2dy}{d\alpha} \tag{48}$$

ou, plus simplement, de l'équation (1):

$$T = \int_s pdy + \int_s fV^2dx = ph + fV^2d \tag{49}$$

en appelant h la profondeur atteinte, et d la distance horizontale entre le dormant Q de la remorque à bord, et le panneau P. Comme l'arc de courbe PQ est, en pratique tendu, et que sa pente moyenne est faible, on simplifie l'expession de T donnée par les équations (48) et (49), en remplaçant la distance d par la longueur de remorque s. On commet ainsi une erreur par excès. La formule approchée don-

nant alors la tension est très commode, pour avoir immédiatement, dans la pratique, une limite maxima de la charge supportée par l'aussière:

$$T' = ph + fV^2 s. \qquad (50)$$

Utilisation des Courbes. Nous savons maintenant tracer le réseau des courbes d'équilibre d'une certaine catégorie d'aussières (μ donné), avec $H = -1$. Les courbes ne diffèrent entre elles que par leur λ.

Pour connaître la forme d'équilibre d'une aussière donnée, remorquant à une vitesse connue un certain panneau, on mesure la pente naturelle de l'aussière, et on choisit, dans le réseau, la courbe dont le λ est égal à cette pente.

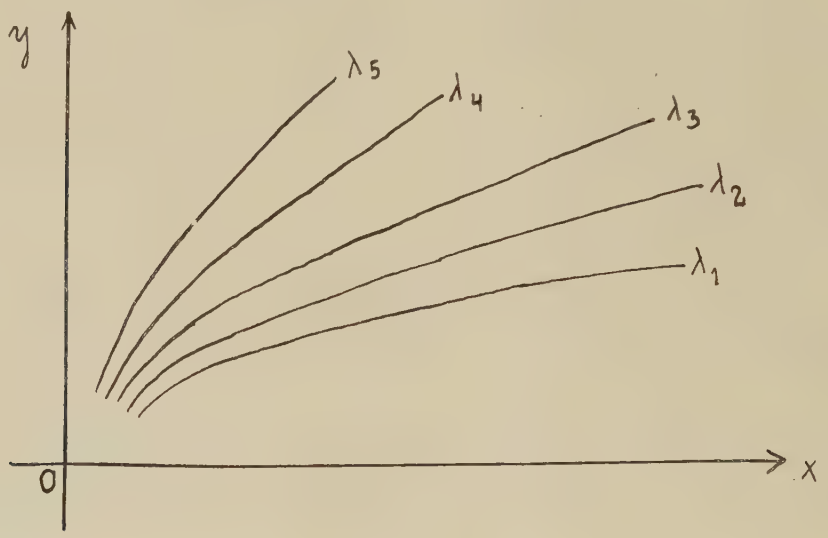


Fig. 29.

On détermine expérimentalement l'angle de l'aussière au panneau. Pour cela, on traîne l'aussière, remorquant le panneau et les appareils à immerger, immergés à 1,50 m ou 2 m de la surface. On mesure l'angle de la remorque avec l'horizontale. Cette mesure n'est pas très précise, mais cela n'occasionne qu'une faible erreur sur la forme de la courbe si l'angle est grand.

Pour déterminer H, enfin, on mesure la profondeur atteinte par le panneau et les appareils pour une longueur connue de remorque. On choisit l'échelle du graphique de manière que cela »colle«. Avec deux mesures de la profondeur, on peut déterminer par tâtonnements (nous n'avons pas les moyens de poser le système de deux équations), H et l'angle au panneau; cela dispense de la mesure directe de cette dernière quantité.

La courbe entièrement déterminée peut servir à établir un tableau numérique

de la profondeur atteinte, en fonction de la longueur de remorque. C'était là notre but primitif, puisque nous étions très pauvres en appareils pour mesurer la profondeur.

La forme de l'arc de courbe renseigne sur les qualités du panneau (joint, bien entendu, aux appareils qu'il immerge). Un bon panneau, comme nous l'avons dit dans l'annexe *A*, doit produire une force, due à ses résistances de carène, aussi grande que possible, et aussi près que possible de la verticale. La première qualité donnera une courbe se rapprochant lentement de son asymptote, donc, ayant une pente encore notable avec une grande longueur de remorque. La seconde qualité aura pour effet de faire plonger très brusquement l'aussière, pour une petite longueur de remorque.

La première qualité est indispensable, lorsqu'on veut atteindre les grandes profondeurs. Mais, alors, la tension de la remorque devient considérable.

La seconde qualité est très précieuse pour les recherches à faible profondeur. Un exemple le montre clairement: pour atteindre la profondeur de 10 mètres, avec une pente naturelle de 0,06, sans panneau, il faut filer 167 mètres d'aussière; avec un bon panneau, il suffit de 20 mètres.

La connaissance de la forme de la courbe est surtout utile pour discuter des avantages et des inconvénients d'une installation, et pour en établir le projet: le panneau a d'autant plus d'effet, toutes choses égales d'ailleurs, que l'aussière est plus fine. Avec un même panneau, une aussière plus grosse atteint plus vite une pente très voisine de celle de son asymptote (fig. 30). Mais, par contre, une grosse aussière, à vitesse donnée, a une pente naturelle plus forte qu'une petite aussière de même nature[1]). Pour les grandes longueurs de remorque, on n'a plus intérêt à employer une petite aussière. On pourra donc composer la remorque de plusieurs bouts d'aussière dont la grosseur ira en croissant, depuis le panneau. On maillera sur le panneau une aussière aussi fine que possible. On mesurera sur la courbe la longueur à filer de cette aussière, pour que la pente au point *Q* soit encore franchement supérieure à la pente naturelle de l'aussière de grosseur immédiatement au-dessus. On arrêtera la plus petite aussière à la longueur trouvée, et on fera dessus ajut de l'aussière plus grosse, sur laquelle on répétera le même

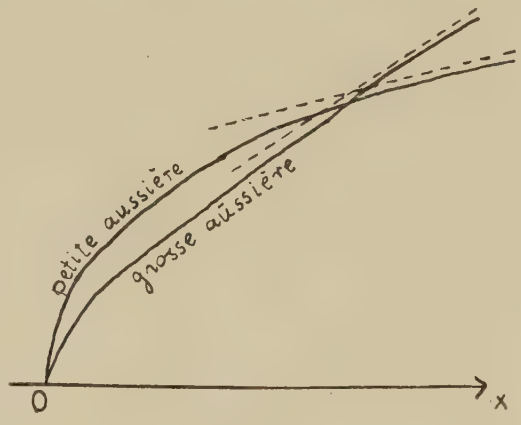


Fig. 30.

[1]) λ croît sensiblement, à V constant, comme la grosseur de l'aussière (ou son diamètre).

raisonnement, et ainsi de suite. La courbe d'équilibre de la remorque hétérogène ainsi obtenue, sera constituée d'une succession d'arcs de courbe, tous connus, tous concaves vers le bas (fig. 31). L'asymptote de la dernière aussière sera presque

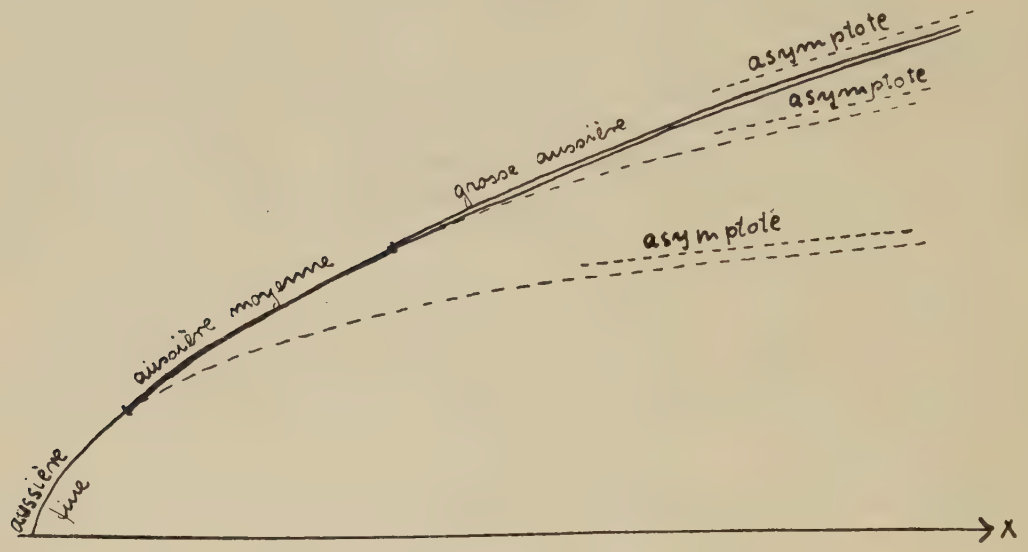


Fig. 31.

atteinte, mais comme la pente de cette asymptote sera encore notable, à cause de la grosseur de cette aussière, on pourra encore avoir intérêt à filer de la remorque, sans que l'accroissement de la profondeur atteinte soit dérisoire.

Résultats finaux. — Conclusion. — On a calculé, pour quatre valeurs de λ et une valeur unique de μ, les valeurs de la fonction v pour des valeurs équidistantes de z. Cela nous a permis de construire la courbe intégrale de la courbe v (celle-ci non construite effectivement). C'est le but des tableaux B 1 et B 2. Ayant tracé, effectivement, la courbe représentant z en fonction de x, on prend les valeurs de z, pour des valeurs équidistantes de x. On trace alors la courbe intégrale de la courbe z, fonction de x, et on a la courbe y cherchée; ce calcul est réalisé dans le tableau B 3. Dans les tableaux B 1, 2, 3, la méthode de quadrature employée est la méthode de Poncelet.

Comparons les résultats ainsi obtenus avec ceux de l'expérience; on a tracé, seulement, sur le graphique les courbes d'équilibre pour $\lambda = 0{,}06$ et $\lambda = 0{,}09$, correspondant à l'aussière en fil d'acier de 24 mm traînée à 10 nœuds, et à 8 nœuds.

Avec l'installation employée du 22 au 26 Août 1926, comprenant: le panneau no. 1, un sac à plankton de 0,50 m de diamètre, le tout remorqué par l'aussière de 24 mm, à 8 nœuds, on obtenait:

Angle au panneau de l'aussière avec l'horizontale: $\text{tg}\,\alpha_0 = 0{,}51$ $\alpha_0 = 27°, 0$
Echelle choisie 1/1250.

Longueur de remorque filée:		Profondeur atteinte	
		Calculée:	Expériment:
100 m		40 m	42 m
220 m		75 m	72 m

Avec l'installation essayée du 1er au 6 Octobre, comprenant: le panneau no. 3, 20 m de chaîne de 16 mm, les appareils de mesures hydrologiques, le tout remorque par l'aussière de 24 mm, à 8 nœuds:

Angle au panneau: $\text{tg}\,\alpha_0 = 0{,}30$ $\alpha_0 = 16°,7$ Echelle 1/750.

Long. fil.:	Prof. calc.:	Expériment:
130 m	29 m	27 m
260 m	46 m	50 m
390 m	64 m	69 m

Avec l'installation adoptée du 13 Octobre jusqu'à la fin de la campagne: le panneau no. 4, un sac à plankton de 30 cm de diamètre, l'aussière de 24 mm comme remorque, on avait:
Angle au panneau: $tg\,\alpha_0 = 0{,}52$ $\alpha_0 = 27°,5$ Echelle 1/250.

Long. fil.: 450 m, profondeur atteinte: 55 m

Comme on n'a pas fait d'autres mesures de profondeur avec cette installation, on ne peut pas vérifier si l'angle α_0 et l'échelle (c'est-à-dire H) sont convenablement choisis. Mais on voit tout de suite sur la courbe, que l'arc utilisé se rapproche beaucoup de l'asymptote, bien que partant, au panneau, d'un angle avec l'horizontale assez grand. Il n'y a donc pas grand intérêt à filer plus de 450 m de remorque avec cette installation.

Il n'en était pas de même avec les deux précédentes: on était encore très loin de l'asymptote, avec les longueurs filées, mais on était limité, alors, par la solidité de l'aussière (la tension initiale dûe au panneau était beaucoup plus grande avec les panneaux n° 1 et 2, car leur surface était plus de quatre fois plus grande que celle du panneau n° 4). Ici apparaît encore l'utilité d'avoir une remorque hétérogène, à section croissante, la tension augmentant au point de remorque, avec la longueur filée.

Cette étude, assez sommaire, ne présente pas l'intérêt très général de celle de la résistance du plan mince. Mais, comme le problème n'avait pas encore était traité en entier, nous avons cru bon d'en donner un aperçu d'ensemble, dans un but pratique.

III.

Modèle de chalut pour pêche à diverses profondeurs.

Le filet a la forme d'une poche conique, comme un chalut ordinaire. Son ouverture, souple, est maintenue béante sous l'effet de trois forces: une, dirigée vers le bas, produite par un panneau de plongée de grande taille; deux autres, symétriques, provoquées par deux panneaux divergents agissant sur les côtés du filet.

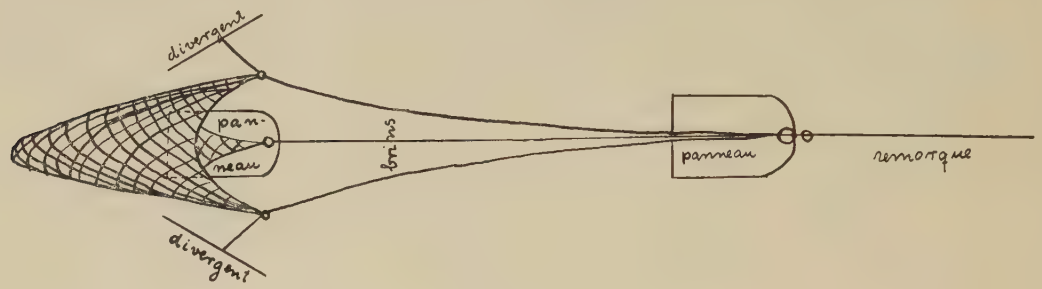


Fig. 32.

L'appareil est remorque par trois brins d'aussière en fil d'acier, frappés respectivement sur le panneau de plongée, et sur les deux divergents.

Les trois brins se réunissent, pour former une patte d'oie. Au point de jonction se maille (par l'intermédiaire d'un émerillon) la remorque et un panneau de plongée.

En filant une certaine longueur de remorque, on immerge le chalut à la profondeur voulue. Des flotteurs (cochonnets) peuvent maintenir à cette profondeur

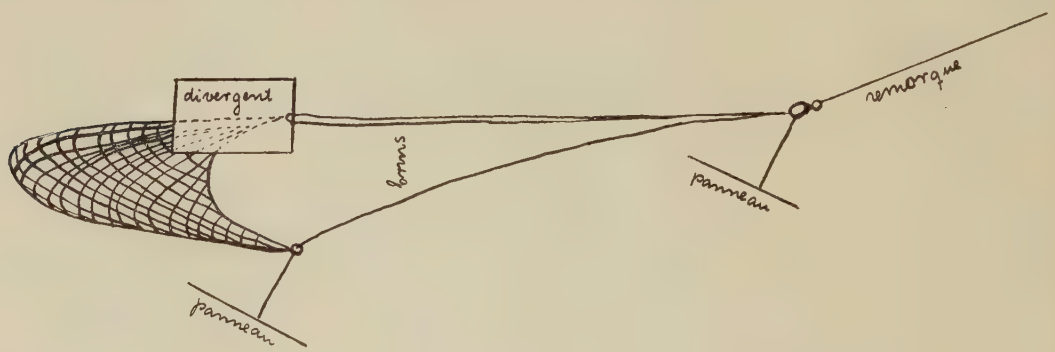


Fig. 33.

les divergents, auxquels ils sont reliés par des pendeurs de longueur variable. Cette précaution est superflue s'il n'y a pas d'inconvénient à ce que le chalut oscille autour d'une immersion moyenne: si, par exemple, le fond est grand. En se basant

sur les calculs du chapitre II, on peut évaluer, en première approximation, la longueur à donner aux brins, pour obtenir une certaine surface d'ouverture du filet, la surface des deux panneaux de plongée et des deux divergents, la grosseur des aussières à employer, la profondeur atteinte en fonction de la longueur de remorque.

Bibliographie.

Hatt. Influence du courant sur les mesures de profondeur prises au moyen de la ligne de sonde (Annales hydrographiques, 1877).

Sir W. Thomson. Mathematical and Physical Papers, vol. 2.

Professor Luigi di Marchi. Theoria degli scandaglia d'alto mare, 1913.

Larose. Note sur le mouvement uniforme d'un fil dans un milieu résistant, Compte-rendus de l'Académie des Sciences, 1917.

Capitaine de Frégate Rondeleux. Étude de la drague divergente, 1921 (secret).

Capitaine de Vaisseau Audouard. Courbure du brin de drague, 1922 (inédit).

Ingénieur Hydrographe en Chef Courtier. Note sur la courbure de la ligne et la correction d'inclinaison dans les sondages au plomb-poisson, Annales hydrographiques, 1926.

Tableau B 1 (λ: 0,00).

($A = 1{,}0755$; $\frac{B}{2} = 0{,}962$; $C = 0{,}00$).

Il a pour but le calcul de v pour des valeurs équidistantes de z. La première partie est établie avec un intervalle 0,1 pour z, et la seconde avec un intervalle de 0,01.

z	$z-\lambda$	$\log (z-\lambda)$	$\log (z-\lambda)^{-A}$	z^2+1	$\log (z^2+1)$	$\log (z^2+1)^{-\frac{B}{2}}$	$\log C \arctg z$	$-C \arctg z \log e$	$-v$
0,90	0,90	— 0,046	+ 0,049	1,810	0,258	— 0,248	..	0	+ 0,64
0,80	0,80	— 0,097	+ 0,104	1,640	0,215	— 0,207	..	0	+ 0,79
0,70	0,70	— 0,155	+ 0,167	1,490	0,173	— 0,166	..	0	+ 1,00
0,60	0,60	— 0,222	+ 0,239	1,360	0,134	— 0,129	..	0	+ 1,29
0,50	0,50	— 0,301	+ 0,324	1,250	0,097	— 0,093	..	0	+ 1,70
0,40	0,40	— 0,398	+ 0,428	1,160	0,064	— 0,062	..	0	+ 2,32
0,30	0,30	— 0,523	+ 0,563	1,090	0,037	— 0,036	..	0	+ 3,37
0,20	0,20	— 0,699	+ 0,752	1,040	0,017	— 0,016	..	0	+ 5,45
0,10	0,10	— 1,000	+ 1,076	1,010	0,004	— 0,004	..	0	+ 11,80
0,09	0,09	— 1,046	+ 1,125	1,008	0,003	— 0,003	..	0	+ 13,24
0,08	0,08	— 1,097	+ 1,180	1,006	0,003	— 0,003	..	0	+ 15,03
0,07	0,07	— 1,155	+ 1,242	1,005	0,002	— 0,002	..	0	+ 17,38
0,06	0,06	— 1,222	+ 1,314	1,004	0,002	— 0,002	..	0	+ 20,51
0,05	0,05	— 1,301	+ 1,399	1,003	0,001	— 0,001	..	0	+ 25,00
0,04	0,04	— 1,398	+ 1,503	1,002	0,001	— 0,001	..	0	+ 31,77
0,03	0,03	— 1,523	+ 1,638	1,001	0,000	— 0,000	..	0	+ 43,45
0,02	0,02	— 1,699	+ 1,827	1,000	0,000	— 0,000	..	0	+ 67,14
0,01	0,01	— 2,000	+ 2,151	1,000	0,000	— 0,000	..	0	+ 141,58
0,00	0,00	— ∞	..	..	..	..	..	..	+ ∞

NB. On a donné les valeurs naturelles des logarithmes (logarithmes vulgaires), sauf dans la colonne 8 où les logarithmes sont donnés comme la somme d'une caractéristique entière négative et d'une mantisse positive (comme dans les tables).

Tableau B 1.

$(\lambda = 0{,}03;\ A = 1{,}076;\ \frac{B}{2} = 0{,}962;\ C = 0{,}022).$

Mêmes observations que précédemment.

z	$z-\lambda$	$\log (z-\lambda)$	$\log (z-\lambda)^{-A}$	z^2+1	$\log (z^2+1)$	$\log (z^2+1)^{-\frac{B}{2}}$	$\log C \arctg z$	$-C \arctg z \log e$	$-v$
0,93	0,90	— 0,046	+ 0,049	1,865	0,271	— 0,261	$\bar{2}$,2169	— 0,007	+ 0,60
0,83	0,80	— 0,097	+ 0,104	1,689	0,228	— 0,219	$\bar{2}$,1829	— 0,007	+ 0,76
0,73	0,70	— 0,155	+ 0,167	1,533	0,186	— 0,179	$\bar{2}$,1422	— 0,006	+ 0,96
0,63	0,60	— 0,222	+ 0,239	1,397	0,145	— 0,139	$\bar{2}$,0923	— 0,005	+ 1,25
0,53	0,50	— 0,301	+ 0,324	1,281	0,108	— 0,103	$\bar{2}$,0301	— 0,005	+ 1,64
0,43	0,40	— 0,398	+ 0,428	1,185	0,074	— 0,071	$\bar{3}$,9510	— 0,004	+ 2,25
0,33	0,30	— 0,523	+ 0,563	1,109	0,045	— 0,043	$\bar{3}$,8459	— 0,003	+ 3,29
0,23	0,20	— 0,699	+ 0,752	1,053	0,022	— 0,021	$\bar{3}$,6965	— 0,002	+ 5,36
0,13	0,10	— 1,000	+ 1,076	1,017	0,007	— 0,007	$\bar{3}$,4535	— 0,001	+ 11,69
0,12	0,09	— 1,046	+ 1,125	1,014	0,006	— 0,006	$\bar{2}$,4199	— 0,001	+ 13,12
0,11	0,08	— 1,097	+ 1,180	1,012	0,005	— 0,005	$\bar{2}$,3824	— 0,001	+ 14,93
0,10	0,07	— 1,155	+ 1,243	1,010	0,004	— 0,004	$\bar{2}$,3414	— 0,001	+ 17,30
0,09	0,06	— 1,222	+ 1,315	1,008	0,003	— 0,003	$\bar{2}$,2961	— 0,001	+ 20,46
0,08	0,05	— 1,301	+ 1,400	1,006	0,003	— 0,003	$\bar{2}$,2439	— 0,001	+ 24,89
0,07	0,04	— 1,398	+ 1,504	1,005	0,002	— 0,002	$\bar{2}$,1863	— 0,001	+ 31,70
0,06	0,03	— 1,523	+ 1,639	1,004	0,002	— 0,002	$\bar{2}$,1200	— 0,001	+ 43,25
0,05	0,02	— 1,699	+ 1,828	1,003	0,001	— 0,001	$\bar{3}$,0416	— 0,000	+ 67,14
0,04	0,01	— 2,000	+ 2,152	1,002	0,001	— 0,001	$\bar{4}$,9428	— 0,000	+ 141,58
0,03	0,00	— ∞	..	..	..	..	..	..	+ ∞

Tableau B 1.

($\lambda = 0{,}06$; $A = 1{,}079$; $\frac{B}{2} = 0{,}961$; $C = 0{,}055$).

Mêmes observations que précédemment.

z	$z-\lambda$	$\log(z-\lambda)$	$\log(z-\lambda)^{-A}$	z^2+1	$\log(z^2+1)$	$\log(z^2+1)^{-\frac{B}{2}}$	$\log C \operatorname{arc\,tg} z$	$C \operatorname{arc\,tg} z \log e$	$-v$
0,96	0,90	— 0,046	+ 0,050	1,922	0,284	— 0,273	$\bar{2}$,6241	— 0,018	+ 0,57
0,86	0,80	— 0,097	+ 0,105	1,740	0,241	— 0,231	$\bar{2}$,5918	— 0,017	+ 0,72
0,76	0,70	— 0,155	+ 0,167	1,578	0,198	— 0,190	$\bar{2}$,5532	— 0,016	+ 0,91
0,66	0,60	— 0,222	+ 0,240	1,436	0,157	— 0,151	$\bar{2}$,5062	— 0,014	+ 1,19
0,56	0,50	— 0,301	+ 0,325	1,314	0,119	— 0,114	$\bar{2}$,4484	— 0,012	+ 1,58
0,46	0,40	— 0,398	+ 0,429	1,212	0,084	— 0,081	$\bar{2}$,3749	— 0,010	+ 2,18
0,36	0,30	— 0,523	+ 0,564	1,130	0,053	— 0,051	$\bar{2}$,2789	— 0,008	+ 3,20
0,26	0,20	— 0,699	+ 0,754	1,068	0,029	— 0,028	$\bar{2}$,1456	— 0,006	+ 5,25
0,16	0,10	— 1,000	+ 1,079	1,026	0,011	— 0,011	$\bar{3}$,9405	— 0,004	+ 12,14
0,15	0,09	— 1,046	+ 1,129	1,023	0,010	— 0,010	$\bar{3}$,9134	— 0,004	+ 13,03
0,14	0,08	— 1,097	+ 1,184	1,020	0,009	— 0,009	$\bar{3}$,8835	— 0,003	+ 14,86
0,13	0,07	— 1,155	+ 1,246	1,017	0,007	— 0,007	$\bar{3}$,8515	— 0,003	+ 17,22
0,12	0,06	— 1,222	+ 1,319	1,014	0,006	— 0,006	$\bar{3}$,8179	— 0,003	+ 20,42
0,11	0,05	— 1,301	+ 1,404	1,012	0,005	— 0,005	$\bar{3}$,7804	— 0,003	+ 24,89
0,10	0,04	— 1,398	+ 1,508	1,010	0,004	— 0,004	$\bar{3}$,7394	— 0,002	+ 31,77
0,09	0,03	— 1,523	+ 1,643	1,008	0,003	— 0,003	$\bar{3}$,6941	— 0,002	+ 43,45
0,08	0,02	— 1,699	+ 1,833	1,006	0,003	— 0,003	$\bar{3}$,6419	— 0,002	+ 67,30
0,07	0,01	— 2,000	+ 2,158	1,005	0,002	— 0,002	$\bar{3}$,5843	— 0,002	+ 142,56
0,06	0,00	— ∞	+ ∞	..	..	..	..	..	+ ∞

Tableau B 1.

($\lambda = 0{,}09$; $A = 1{,}083$; $\frac{B}{2} = 0{,}859$; $C = 0{,}083$).

Mêmes observations que précédemment.

z	$z-\lambda$	$\log(z-\lambda)$	$\log(z-\lambda)^{-A}$	z^2+1	$\log(z+1)$	$\log(z^2+1)^{-\frac{B}{2}}$	$\log C \operatorname{arc\,tg} z$	$C \operatorname{arc\,tg} z \log e$	$-v$
0,99	0,90	— 0,046	+ 0,050	1,980	0,297	— 0,255	$\bar{2}$,8114	— 0,028	+ 0,58
0,89	0,80	— 0,097	+ 0,105	1,792	0,253	— 0,217	$\bar{2}$,7807	— 0,026	+ 0,73
0,79	0,70	— 0,155	+ 0,167	1,624	0,211	— 0,181	$\bar{2}$,7443	— 0,024	+ 0,92
0,69	0,60	— 0,222	+ 0,240	1,476	0,169	— 0,145	$\bar{2}$,7000	— 0,022	+ 1,18
0,59	0,50	— 0,301	+ 0,326	1,348	0,130	— 0,112	$\bar{2}$,6457	— 0,019	+ 1,57
0,49	0,40	— 0,398	+ 0,431	1,240	0,093	— 0,080	$\bar{2}$,5776	— 0,016	+ 2,16
0,39	0,30	— 0,523	+ 0,566	1,152	0,061	— 0,052	$\bar{2}$,4893	— 0,013	+ 3,17
0,29	0,20	— 0,699	+ 0,757	1,084	0,035	— 0,030	$\bar{2}$,3696	— 0,010	+ 5,21
0,19	0,10	— 1,000	+ 1,083	1,036	0,015	— 0,013	$\bar{2}$,1924	— 0,007	+ 11,56
0,18	0,09	— 1,046	+ 1,133	1,032	0,014	— 0,012	$\bar{2}$,1696	— 0,006	+ 13,03
0,17	0,08	— 1,097	+ 1,188	1,029	0,012	— 0,010	$\bar{2}$,1455	— 0,006	+ 14,86
0,16	0,07	— 1,155	+ 1,240	1,026	0,011	— 0,009	$\bar{2}$,1192	— 0,006	+ 16,79
0,15	0,06	— 1,222	+ 1,323	1,023	0,010	— 0,009	$\bar{2}$,0921	— 0,005	+ 20,37
0,14	0,05	— 1,301	+ 1,409	1,020	0,009	— 0,008	$\bar{2}$,0622	— 0,005	+ 24,89
0,13	0,04	— 1,398	+ 1,514	1,017	0,007	— 0,006	$\bar{2}$,0302	— 0,005	+ 31,84
0,12	0,03	— 1,523	+ 1,649	1,014	0,006	— 0,005	$\bar{3}$,9966	— 0,004	+ 43,65
0,11	0,02	— 1,699	+ 1,840	1,012	0,005	— 0,004	$\bar{3}$,9591	— 0,004	+ 67,92
0,10	0,01	— 2,000	+ 2,166	1,010	0,004	— 0,003	$\bar{3}$,9181	— 0,004	+ 144,21
0,09	0,00	— ∞	+ ∞		..	..	..	..	+ ∞

Tableau B 2.

$S_n = \Sigma v \cdot \Delta z.$

$\lambda = 0{,}00$		$F = 0{,}3465$		$\lambda = 0{,}03$		$P = \left\{ \begin{matrix} 0{,}3410 \\ 0{,}3469 \end{matrix} \right\} = 0{,}344$	
z	v	S_n	x	z	v	S_n	x
1,00		..	0,347	1,00		..	0,344
0,95	0,64	0,000	0,379	0,98	0,60	0,000	0,356
0,85	0,79	0,064	0,443	0,88	0,76	0,060	0,416
0,75	1,00	0,143	0,522	0,78	0,96	0,136	0,492
0,65	1,29	0,243	0,622	0,68	1,25	0,232	0,588
0,55	1,70	0,372	0,751	0,58	1,64	0,357	0,713
0,45	2,32	0,542	0,921	0,48	2,25	0,521	0,877
0,35	3,37	0,774	1,153	0,38	3,29	0,746	1,102
0,25	5,45	1,111	1,490	0,28	5,36	1,075	1,431
0,15		1,656	2,035	0,18		1,611	1,967
0,095	13,24	0,000	2,428	0,125	13,12	0,000	2,353
0,085	15,03	0,132	2,560	0,115	14,93	0,132	2,485
0,075	17,38	0,283	2,711	0,105	17,30	0,281	2,634
0,065	20,51	0,457	2,885	0,095	20,46	0,454	2,807
0,055	25,00	0,662	3,090	0,085	24,89	0,658	3,011
0,045	31,77	0,912	3,340	0,075	31,70	0,907	3,260
0,035	43,45	1,229	3,657	0,065	43,25	1,224	3,577
0,025	67,14	1,664	4,092	0,055	67,14	1,657	4,010
0,015	141,58	2,335	4,763	0,045	141,58	2,328	4,681
0,005		3,751	6,179	0,035		3,744	6,097
0,000	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$		$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
				0,025			

Tableau B 2.

$S_n = \Sigma v \cdot \Delta z.$

$\lambda = 0{,}06$	$P = \left\{ \begin{matrix} 0{,}3302 \\ 0{,}3448 \end{matrix} \right\} = 0{,}338$			$\lambda = 0{,}09$	$P = \left\{ \begin{matrix} 0{,}3223 \\ 0{,}3440 \end{matrix} \right\} = 0{,}333$		
z	v	S_n	x	z	v	S_n	x
1,01		0,000	0,332	1,04		0,000	0,310
1,00	00,57	..	0,338	1,00	0,58	..	0,333
0,91	0,72	0,057	0,387	0,94	0,73	0,058	0,368
0,81	0,91	0,129	0,461	0,84	0,92	0,131	0,441
0,71	1,19	0,220	0,552	0,74	1,18	0,223	0,533
0,61	1,58	0,339	0,671	0,64	1,57	0,341	0,651
0,51	2,18	0,497	0,829	0,54	2,16	0,498	0,808
0,41	3,20	0,715	1,047	0,44	3,17	0,714	1,024
0,31	5,25	1,035	1,367	0,34	5,21	1,031	1,341
0,21		1,560	1,892	0,24		1,552	1,862
0,155	13,03	0,000	2,326	0,185	13,03	0,000	2,243
0,145	14,86	0,130	2,456	0,175	14,86	0,130	2,373
0,135	17,22	0,279	2,605	0,165	16,79	0,279	2,522
0,125	20,42	0,451	2,777	0,155	20,37	0,447	2,690
0,115	24,89	0,655	2,981	0,145	24,89	0,651	2,894
0,105	31,77	0,904	3,230	0,135	31,84	0,899	3,142
0,095	43,45	1,222	3,548	0,125	43,65	1,218	3,461
0,085	67,30	1,656	3,982	0,115	67,92	1,654	3,897
0,075	142,56	2,329	4,655	0,105	144,21	2,334	4,577
0,065		3,755	6,081	0,095		3,776	6,019
	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$		$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
0,055				0,085			

Tableau B 3.

$s_n = \Sigma z \cdot \Delta x.$

L'intervalle Δx est égal à 0,3.

La constante Q est choisie arbitrairement pour la convenance du graphique.

	$\lambda = 0{,}00$ $\quad Q = 0{,}245$			$\lambda = 0{,}03$ $\quad Q = 0{,}245$		
x	z	Σz	y	z	Σz	y
0,3	1,650	1,650	0,740	1,650	1,650	0,740
0,6	0,842	2,492	0,993	0,832	2,482	0,990
0,9	0,550	3,042	1,158	0,555	3,037	1,156
1,2	0,390	3,432	1,275	0,398	3,435	1,276
1,5	0,286	3,718	1,360	0,302	3,737	1,366
1,8	0,217	3,935	1,426	0,232	3,969	1,436
2,1	0,163	4,098	1,474	0,182	4,151	1,490
2,4	0,117	4,215	1,510	0,138	4,289	1,532
2,7	0,086	4,301	1,535	0,111	4,400	1,565
3,0	0,067	4,368	1,555	0,092	4,492	1,593
3,3	0,051	4,419	1,571	0,078	4,570	1,616
3,6	0,041	4,460	1,583	0,068	4,638	1,636
3,9	0,032	4,492	1,593	0,062	4,700	1,655
4,2	0,027	4,519	1,601	0,055	4,755	1,672
4,5	0,022	4,541	1,607	0,049	4,804	1,686
4,8	0,018	4,559	1,613	0,045	4,849	1,700
5,1	0,014	4,573	1,617	0,042	4,891	1,712
5,4	0,012	4,585	1,621	0,040	4,931	1,724
5,7	0,011	4,596	1,624	0,039	4,970	1,736

Tableau B 3.

$s_n = \Sigma z \cdot \Delta x.$

Mêmes observations que précédemment.

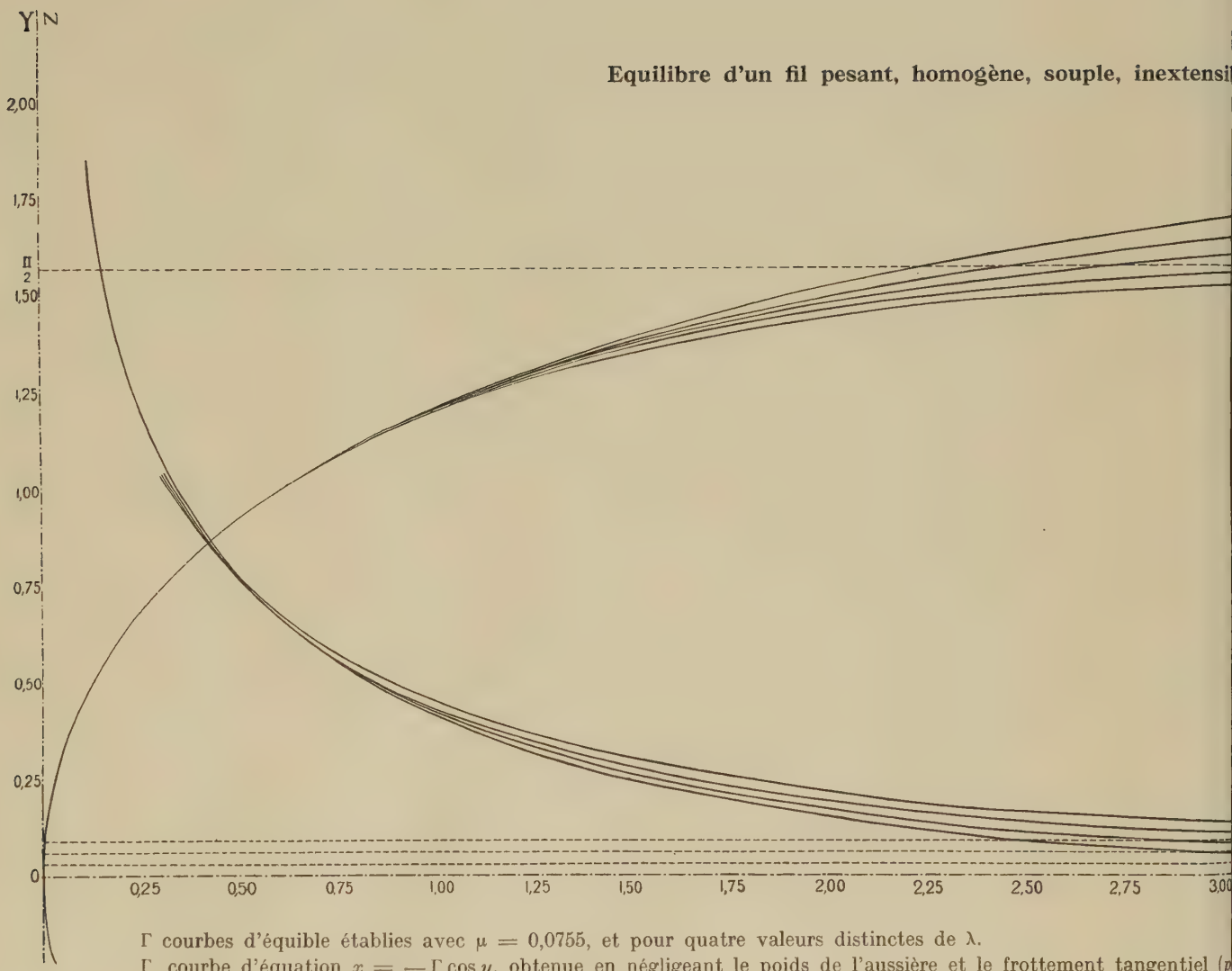
	$\lambda = 0{,}06$ $\quad Q = 0{,}245$			$\lambda = 0{,}09$ $\quad Q = 0{,}245$		
x	z	Σz	y	z	Σz	y
0,3	1,650	1,650	0,740	1,650	1,650	0,740
0,6	0,832	2,482	0,990	0,825	2,475	0,988
0,9	0,556	3,038	1,156	0,570	3,045	1,159
1,2	0,410	3,448	1,279	0,430	3,475	1,288
1,5	0,314	3,762	1,374	0,336	3,811	1,388
1,8	0,251	4,013	1,449	0,275	4,086	1,471
2,1	0,201	4,214	1,509	0,226	4,312	1,539
2,4	0,165	4,379	1,559	0,185	4,497	1,594
2,7	0,135	4,514	1,599	0,165	4,662	1,644
3,0	0,121	4,635	1,636	0,146	4,808	1,687
3,3	0,107	4,742	1,668	0,134	4,942	1,728
3,6	0,098	4,840	1,697	0,126	5,068	1,765
3,9	0,092	4,932	1,725	0,118	5,186	1,801
4,2	0,084	5,016	1,750	0,113	5,299	1,835
4,5	0,079	5,095	1,774	0,108	5,407	1,867
4,8	0,075	5,170	1,796	0,104	5,511	1,898
5,1	0,073	5,242	1,818	0,102	5,613	1,929
5,4	0,070	5,312	1,839	0,100	5,713	1,959
5,7	0,069	5,381	1,859	0,099	5,812	1,989

Fonction $x = -L \cos y$.

Cette courbe est une solution approchée du problème, obtenue en négligeant le frottement et le poids du fil (Hatt, Audouard, Courtier). On l'a tracé sur le même graphique que les autres courbes pour permettre de comparer les résultats obtenus avec hypothèses complètes et les hypothèses simplifiées.

y radians	$y°$	log cos y	$-L \cos y$
0,0	0°00′	0,0000	0,0000
0,1	5°44′	— 0,0022	0,0051
0,2	11°27′	— 0,0087	0,0200
0,3	17°11′	— 0,0198	0,0456
0,4	22°55′	— 0,0357	0,0822
0,5	28°39′	— 0,0567	0,1306
0,6	34°23′	— 0,0834	0,1920
0,7	40°06′	— 0,1164	0,2680
0,8	45°50′	— 0,1569	0,3612
0,9	51°34′	— 0,2064	0,4752
1,0	57°18′	— 0,2674	0,6157
1,1	53°02′	— 0,3434	0,7907
1,2	68°45′	— 0,4408	1,0152
1,3	74°29′	— 0,5727	1,3186
1,4	80°13′	— 0,7697	1,7722
1,5	85°57′	— 1,1505	2,6491
1,52	87°06′	— 1,2953	2,9826
1,54	88°15′	— 1,5131	3,4838
1,55	88°49′	— 1,6844	3,8779
1,56	89°23′	— 1,9716	4,5394
$\frac{\pi}{2}$	90°00′	$-\infty$	$+\infty$

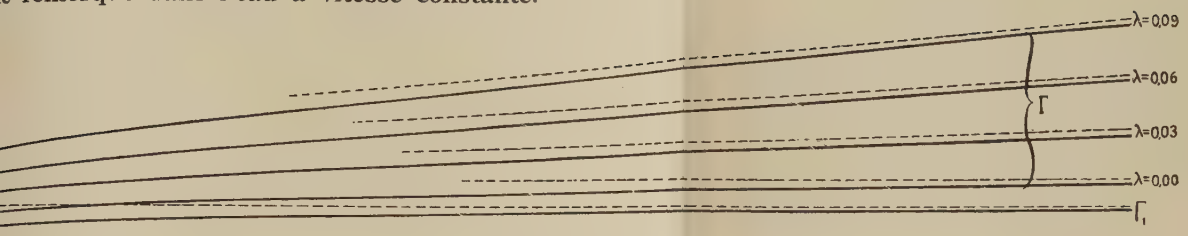
Equilibre d'un fil pesant, homogène, souple, inextensi

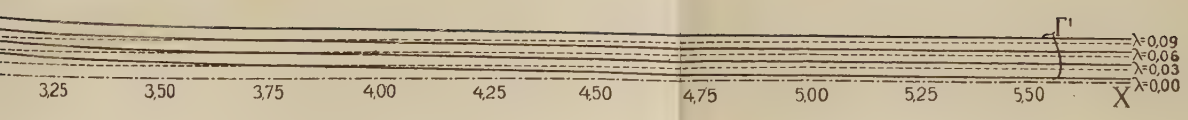


Γ courbes d'équible établies avec $\mu = 0{,}0755$, et pour quatre valeurs distinctes de λ.
Γ, courbe d'équation $x = -\Gamma \cos y$, obtenue en négligeant le poids de l'aussière et le frottement tangentiel (p
Γ′ courbes dérivées des courbes Γ.

Les axes sont tracés en traits mixtes; les asymptotes des courbes en traits interrompus.

e remorqué dans l'eau à vitesse constante.





$0, \mu = 0$).

RAPPORT JUBILAIRE